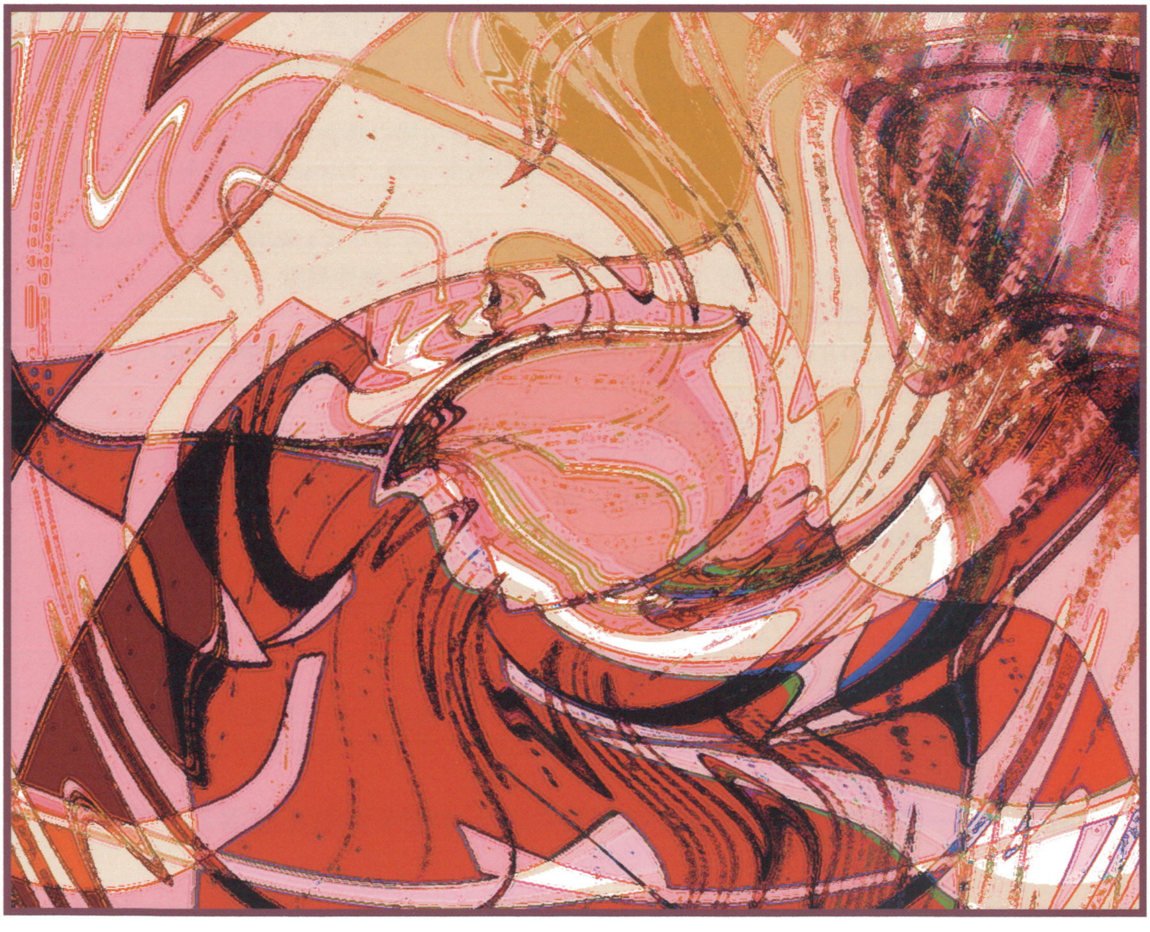
昭和38年7月2日第3種郵便物認可
2013年8月1日発行　第51巻8号　毎月1回1日発行
ISSN 0386—2240

数理科学

8
2013

特集 エネルギーを通して物理学を知る
古典物理から現代物理まで



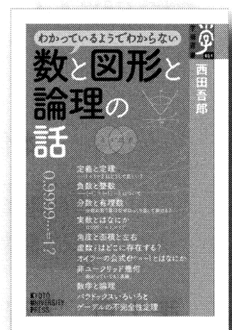
No.602

サイエンス社

わかっているようでわからない

数と図形と論理の話

西田吾郎 著　　四六判・280 頁・1890 円



足し算の計算法や長方形の面積の求め方は，小学校で習う当たり前のこと。しかし，「なぜ１＋１＝２なのか？」「そもそも面積とは何か？」と問われると，きちんと説明できる人は少ないのではないでしょうか。本書は，高校や大学初学年で学ぶ数と図形と論理の数学から，当たり前のようで実はきちんと理解されていない 10 のトピックスを取り上げ，とことん解説します。［学術選書 061］

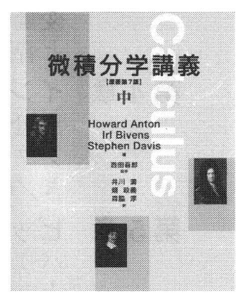
◉ **大学の数学はここから始まる**

微積分学講義　中

Anton, Bivens, Davis 著　　7 月 11 日発売

西田吾郎 監修

井川 満・畑 政義・森脇 淳 訳　　AB 判・424 頁・3990 円



丁寧な解説で概念や公式の理解を深め，豊富な演習問題で思考力と計算力を鍛える。具体的な場面設定の演習問題で，理学や工学，経済学ほか，広範な専門領域への応用に役立つ。中巻は，積分法の基礎と応用・さまざまな関数の微積分・無限級数。　▶上巻　好評発売中　3990 円

既刊書より

数，方程式とユークリッド幾何 ――ガロア理論から折り紙の数学まで　　西田吾郎 著　2940 円

代数幾何学　　廣中平祐 講義／森　重文 記録　丸山正樹・森脇 淳・川口 周 編　2940 円

確 率 概 論　　河野敬雄 著　2310 円

アインシュタインの反乱と量子コンピュータ　　佐藤文隆 著　1890 円

科学のセンスをつかむ物理学の基礎 ――エネルギーの理解を軸に　　林　哲介 著　2940 円　［実験アニメーション CD-ROM 付］

京都大学学術出版会　606-8315 京都市左京区吉田近衛町 69 京大吉田南構内〈価格 5%税込〉
http://www.kyoto-up.or.jp/ TEL 075-761-6182 FAX 075-761-6190

MATHEMATICAL SCIENCES
Number 602 August 2013

エネルギーを通して物理学を知る

古典物理から現代物理まで

表紙：戸川　隼人

お得な定期購読をおすすめします

毎号確実に御手元へ

地域によって書店店頭に陳列されない場合があります．**郵送料小社負担**にて確実に御手元へ届く定期予約購読をおすすめします．

予約購読は1年間(本誌のみ) 11,000円，半年間(本誌のみ) 5,500円．(税込み価格)

造本コストは更に上昇気味です．小社としてもあらゆる努力をもって廉価で提供してゆきたいと思っておりますが，定価改定の止むなき事態がかんがえられます．この場合予約購読期間中のものにつきましては料金据置きとなります．なお，臨時別冊のご注文については，本誌予約購読者の方には，商品到着後のお支払いにて承ります．

お申し込みは本誌とじ込みの振替用紙を御利用下さい．

数理科学特集一覧

63年/7～2010年/5 省略

2010年/6 現代幾何と方程式
- /7 物理学と行列
- /8 力の統一にむけて
- /9 南部陽一郎
- /10 曲面の不思議
- /11 連続から離散へ
- /12 物理における《破れ》と調和

2011年/1 数論の探求
- /2 物理現象を読み解く数学的手法
- /3 方程式と現代代数学
- /4 物理学と多様体
- /5 初学者を悩ます数理の概念
- /6 物理イメージと数式表現
- /7 〈隠れた〉物理法則
- /8 計算が拓く数学と物理の世界
- /9 オイラー
- /10 時空と熱力学
- /11 線形から非線形へ
- /12 物理と仮説

2012年/1 数学から物理へ，物理から数学へ
- /2 古典のススメ[物理編]
- /3 量子を操る
- /4 量子力学の数学的技法
- /5 解析学と物理学
- /6 面白い発想[物理編]
- /7 数学と物理における格子
- /8 導来圏をめぐって
- /9 ハイゼンベルク
- /10 超弦理論の数理
- /11 物理と数学における厳密解
- /12〈振動する〉物理

2013年/1 表現論の世界
- /2 《量子化》の発想
- /3 光と物理学
- /4 解析学における様々な発想
- /5 次元の作法
- /6 発展する統計力学
- /7 群と物理学

数理科学臨時別冊一覧

- 12年/3 演習形式で学ぶリー群・リー環
- 12年/4 弦理論の代数的基礎
- 12年/5 アインシュタイン方程式
- 12年/6 CP対称性の破れ
- 12年/7 弦の場の理論
- 12年/9 超弦理論の応用
- 12年/10 複素多様体論講義
- 12年/11 幾何学の量子化
- 12年/12 量子力学から超対称性へ
- 13年/1 行列解析ノート
- 13年/4 無限量子系の物理と数理
- 13年/7 現代宇宙論講義

「数理科学」のバックナンバーは下記の書店・生協の自然科学書売場で特別販売しております

紀伊國屋書店本店(新宿)
紀伊國屋書店新宿南店
あおい書店中野本店
オリオン書房ノルテ店(立川)
くまざわ書店本店(八王子)
くまざわ書店桜ヶ丘店(多摩)
書泉グランデ(神田)
三省堂本店(神田)
リブロ池袋店
ジュンク堂池袋本店
芳林堂(高田馬場)
MARUZEN & ジュンク堂渋谷店
八重洲ブックセンター(東京駅前)
丸善丸の内本店(東京駅前)
丸善日本橋店
MARUZEN多摩センター店
ジュンク堂吉祥寺店
ブックファースト青葉台店(横浜)
有隣堂イセザキ町本店(横浜)
有隣堂西口・東口(横浜)
有隣堂厚木店(厚木)
ジュンク堂盛岡店
丸善津田沼店
ジュンク堂新潟店
ジュンク堂甲府岡島店
MARUZEN & ジュンク堂新静岡店
戸田書店静岡本店
ジュンク堂大阪本店
紀伊國屋書店梅田店(大阪)
アバンティブックセンター(京都)
ジュンク堂京都店
ジュンク堂三宮店
ジュンク堂三宮駅前店
ジュンク堂大分店
喜久屋書店倉敷店
MARUZEN広島店
紀伊國屋書店福岡本店
ジュンク堂福岡店
丸善博多店
ジュンク堂鹿児島店
紀伊國屋書店新潟店
ジュンク堂旭川店
金港堂(仙台)
金港堂パーク店(仙台)
ジュンク堂仙台本店
ジュンク堂秋田店
ジュンク堂郡山店
鹿島ブックセンター(いわき)
友朋堂(つくば)

——大学生協・売店——
東京大学 本郷・駒場
東京工業大学 大岡山・長津田
東京理科大学 新宿
早稲田大学 理工学部
慶応義塾大学 矢上台
福井大学
筑波大学 大学会館書籍部 第一学群書籍部
埼玉大学
名古屋工業大学・愛知教育大学
大阪大学・神戸大学 ランス
京都大学・九州工業大学
東北大学 理薬・工学
室蘭工業大学
徳島大学 常三島
愛媛大学 城北
山形大学 小白川
島根大学
学習院大学 成文堂
北海道大学 クラーク店
熊本大学
名古屋大学
広島大学(北1店)
九州大学(理系)

August 2013 MATHEMATICAL SCIENCES Number 602

特集／エネルギーを通して物理学を知る

巻頭言

佐藤 勝彦

今時，世間でエネルギー問題と言えば，人の生活や産業に不可欠な電力，石油などの問題である．特に日本では福島第一原子力発電所事故以後，原子力発電の安全性が疑われ国内の原子力発電所のほとんどが止まった．太陽光や風力，地熱，水力などいわゆるクリーンな自然エネルギーによる発電の割合を高めていかなければならないが，現実には石油，LNG，石炭など二酸化炭素を放出する化石燃料に大きく依存せざるを得ない状況になっている．化石燃料や，自然エネルギーのほとんど（地熱を除く）は，太陽エネルギーを地球のシステムがため込んだもので，元をただせば太陽内部における核融合による核エネルギーである．地熱も，その一部は重力エネルギーに因るが，多くは放射性元素の崩壊熱であり，核エネルギーである．これらの放射性元素や原子炉で燃料として使われているウラニウム（ウラン）など核分裂元素は，恒星の中で起こる核融合反応や，恒星が超新星爆発で中心部分が重力崩壊を起こしたとき解放される重力エネルギーに因って合成されたものである．

このように我々が用いているエネルギーはほとんど宇宙起源のものであり，それが物理法則にしたがって，エネルギーを担う媒体をとり換えながらやってきているのである．

今回の特集「エネルギーを通して物理学を知る」はエネルギーをキーワードとして古典物理からダークエネルギーなどの現代物理の謎までの物理学を振り返ってみようという企画である．エネルギーは物理学の大系において基本的概念であり，エネルギーという言葉を使わずに物理学を語ることはできない．しかし，意外なことにエネルギーが物理用語として定着したのはケルヴィン卿（W. トムソン）の熱力学の第二法則を定式化した論文（1851）からだと言われている．19 世紀はこの論文に先立ち，ジュールによる運動エネルギーから熱エネルギーへの変換の研究，またヘルムホルツによるエネルギー保存の研究も発表されており，熱エネルギーに関する研究が花開いた世紀でもある．またこの論文の後マックスウェルの電磁場の方程式も出されており，物理学が完成したかのように思えた世紀でもある．ケルヴィン卿は 19 世紀末，“There is nothing new to be discovered in physics now. All that remains is more and more precise measurement.”（物理学においては最早新たな発見はない．残されているのはより正確な測定だけだ.）と言い切った人物であったことでも有名である．古典物理学は美しい体系であり，その論理一環した美しさの一つは「エネルギー」の概念に負うところが大きいということもいえるであろう．「エネルギー」をめぐる研究の進展は，物理学史上たいへん興味深いものである．興味ある方はコンパクトにまとめられた阿部龍蔵氏の解説（本誌 2003 年

12月号）を読まれることをお薦めしたい．

今回の特集では，物理学の基礎である古典力学，量子力学，熱・統計力学とエネルギーについては，それぞれ佐野雅己氏，小形正男氏，田崎晴明氏に解説していただいた．これらの基礎分野では優れた多くの教科書もあるが，この特集ではその基礎から丁寧に説かれており，ひと味違う深い解説となっている．また，それぞれ筆者の研究分野やそれに近い分野での興味深い課題についてもふれていただいている．例えば田崎氏は「量子力学から熱力学第二法則へ？」という節を設け，両者の関係をユニークな視点で論じ，話題を提供されている．生物とエネルギーについて，伏見譲氏はDNA支配の機械論的生命観と，プリゴジンの散逸構造に代表される生成論的生命観との相補性という視点から，生命体のエネルギー代謝を解説され，また生命の起源，進化について論じておられる．

よく知られているようにケルヴィン卿は，物理学においては最早新たな発見はないと言いながらも，“beauty and clearness of theory was overshadowed by two clouds” と語り，当時の物理学における二つの深刻な暗雲，マイケルソンとモーレイによるエーテルの不存在実験と黒体放射の問題を指摘している．これらは現代物理学を支える2本の柱，相対性理論と量子論を生む鍵となったものである．白水徹也氏は相対性理論におけるエネルギーについて，特殊相対論の帰結，エネルギーと質量の同一性，$E=mc^2$ から始まり，一般相対性理論におけるエネルギーの定義，エネルギー保存則をめぐる難しさを解説されている．一般に力学系のエネルギー保存則は，運動量の保存則が空間の一様性から導かれるように，時間の一様性から導かれる．時空の物理である一般相対性理論では時空は一般に曲がっており，局所的法則としてはエネルギー保存則は書き下せるものの大局的には困難が生じる．小林誠氏には，素粒子の質量の階層問題，自然界のエネルギースケールを通じて標準理論とその課題について解説いただいている．昨年，CERNでの素粒子実験で発見されたとされるHiggs粒子は物質に質量を与えるものとして新聞を賑わせたが，現象論的理論であり質量階層性の問題を解くものではない．小林氏は現状と超弦理論などこれからの方向も解説されている．ところで，今，宇宙物理学の最大の謎はダークエネルギー問題である．このエネルギーに働く一般相対性理論的斥力により，現在の宇宙は加速膨張をしていると考えられている．向山信治氏には，宇宙論の基礎から丁寧にこの問題を解説していただいている．一方，ダークエネルギーは存在せず，むしろ一般相対性理論を変更するという異なった立場もあることも紹介している．向山氏の解説では詳しくふれられていないが，宇宙は加速的に体積が急増しているので，圧力が負で，薄まらないエネルギーであるダークエネルギーの総量も加速度的に急増している．同様に宇宙創生のモデルであるインフレーション理論では極微の量子宇宙が真空のエネルギーに因って急膨張し，その総量も加速的に増大したと考えられている．そしてインフレーションの最後に相転移のような現象によって真空のエネルギーは熱エネルギーに転化し，現在宇宙を満たしている物質エネルギーが生まれたと考えられている．インフレーション理論はほとんど無の状態から宇宙の物質エネルギーを作るメカニズムである．現在インフレーション理論は，宇宙背景放射，宇宙の大構造の観測などによって強く支持を受けているが，宇宙初期からの重力波の直接の観測が可能となるまで一つの理論にすぎない．しかし，現在の宇宙を満たしているダークエネルギーの観測の研究が進むことによって，理論の肉付けが進むことを期待したい．

今回の特集により，物理学の大系の中でエネルギーの概念を振り返ることによって物理学の理解が深まり，面白さが広まるとすれば，ありがたいと思っている．

（さとう・かつひこ，自然科学研究機構）

力学的エネルギー

佐野　雅己

1. 力学的エネルギーと未解決問題

この小論では，力学とエネルギーに関わる諸問題について述べたいと思う．エネルギーが保存する力学系は変分原理から導けるが，散逸がある場合には，**変分原理**で記述することはできない．エネルギー散逸があり，特別な場合には，勾配系となり，系はポテンシャル関数の極小に向かって時間発展するが，一般的にはそのような関数は存在しない．エネルギーが保存する場合と保存しない場合，それぞれで解が解析的に解ける場合（**可積分**）や解析的に解けない場合（**非可積分**）があり，周期運動や**ソリトン**，**カオス**などの多彩な運動が現れることを示し，古典的な力学系にもまだ多くの未解決の問題があることを述べたいと思う．

2. 力学の変分原理

今，空間座標を $\boldsymbol{q} \equiv (q_1, q_2, \cdots, q_n)$，運動量を $\boldsymbol{p} \equiv (p_1, p_2, \cdots, p_n)$ とおき，系の運動エネルギーを $T(\boldsymbol{p})$，位置エネルギーを $U(\boldsymbol{q})$，系のラグランジアンを

$$L = L(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}) \equiv T - U \tag{1}$$

とすると，ニュートンの運動方程式は，次の n 変数の場合のオイラー・ラグランジェの式から得られる．

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial L}{\partial q_i} \quad (i = 1, \cdots, n). \tag{2}$$

簡単のために，1変数（$n=1$）の場合に (1) 式を (2) 式に代入してみると，$v = \dot{q}, T = \frac{1}{2}mv^2$ とおいて，

$$m\frac{dv}{dt} = -\frac{\partial U}{\partial q} \tag{3}$$

のようにニュートン方程式が得られる．

オイラー・ラグランジェの式は，次のように**変分原理**から導かれる．ラグランジアンの軌道に沿った積分を作用と呼び，次のように表す．

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L dt. \tag{4}$$

あらゆる可能な運動の中で，自然は作用を最小にするような運動を実現しているという原理を**最小作用の原理**と呼ぶ．簡単のために，ラグランジアンが1組の変数，$(q, \dot{q})$ の関数で，$L = L(q, \dot{q})$ と表せる場合について証明しよう．時刻 t_1 に座標 $q(t_1)$ からスタートし，時刻 t_2 で $q(t_2)$ に到達する軌道のうち，ありとあらゆる軌道を考えるとしよう．実際に実現される軌道を $\bar{q}(t)$ と書くことにし，その軌道を少しずらした軌道 $q(t)$ を

$$q(t) = \bar{q}(t) + \delta q(t) \tag{5}$$

と書く．$\delta q(t)$ は，実際の軌道からのずれを表す．運動の始点と終点は同じにするという条件を課すと，$\delta q(t_1) = \delta q(t_2) = 0$ となる．作用 S の変分

とは，元の軌道に対する作用積分と，それから少しずれた軌道に対する作用積分の差であるから

$$\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}) dt \quad (6)$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q} \delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta \dot{q} \right) dt = 0. \quad (7)$$

$\delta \dot{q} = \frac{d}{dt} \delta q$ より，右辺第二項を部分積分して，

$$\delta S = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta q |_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q} \delta q - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \delta q dt = 0. \quad (8)$$

始点と終点では，$\delta q = 0$ なので，右辺第一項は0であり，どのような δq に対しても(8)式が成り立つためには，次のオイラー・ラグランジェの式を満たす必要がある．

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0. \quad (9)$$

すなわち，ニュートン方程式に従う運動に関する作用積分は，常に極値を取ることが示された．

3. 力学的エネルギーの保存則

力学的エネルギーの保存則は，時間の一様性から導くことができる．時間が一様であるとは，時間に特別な原点はなく，ある時間に成り立つ法則は，別の時間でも成り立つことを意味する．すなわち，運動を支配しているラグランジアンは，時間に陽に依存しない．言い換えれば，$\frac{\partial L}{\partial t} = 0$ であるため，時間に関する微分は，次のようになる．

$$\frac{dL}{dt} = \sum_i \frac{\partial L}{\partial q_i} \dot{q}_i + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \ddot{q}_i \quad (10)$$

$$= \sum_i \dot{q}_i \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \ddot{q}_i \quad (11)$$

$$= \sum_i \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i \right). \quad (12)$$

したがって，

$$\frac{d}{dt} \left(\sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - L \right) = \frac{dE}{dt} = 0. \quad (13)$$

ただしここで，

$$E = \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - L \quad (14)$$

の関係を用いた．すなわち，(13)式は，運動エネルギーの保存則を表している．これは，ネーターの定理と呼ばれる（エミー・ネーターは，ドイツの女性数学者である）．ネーターの定理ではさらに，空間の並進に対する対称性から**運動量の保存則**が，空間の回転に対する対称性から**角運動量の保存則**が導かれる．エネルギーや運動量など，運動によって変わらない量を保存量または運動の恒量と呼ぶ．

4. エネルギー散逸のある場合

天体運動などの場合を除けば，我々が普段目にするマクロな現象で，エネルギーが保存する場合はほとんどない．実際に，身の周りを見渡してみれば，運動には摩擦や粘性が伴い，エネルギーを注ぎ込み続けなければ，やがては運動は止まってしまう．そのような場合に，最小作用の原理から運動を導くことはできない．ただ，このときの運動方程式は，次のように書くことができる．

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = Q_j. \quad (15)$$

ここで Q_j は一般化力と呼ばれるポテンシャルからは導かれない力であり，摩擦力などを表している．摩擦力が $f_j = -kv_j$ などのように速度に比例する場合は，速度の2次形式で表される次の**散逸関数**

$$F = \frac{1}{2} \sum_j k v_j^2 \quad (16)$$

を導入すると一般化力 Q_j は，

$$Q_j = -\frac{\partial F}{\partial \dot{q}_j} \quad (17)$$

と書けるので，(15)式は，散逸関数を用いて次のように書くことができる．

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = -\frac{\partial F}{\partial \dot{q}_j}. \quad (18)$$

ただし，これはオイラー・ラグランジェの式に非ポテンシャル力を付け加えただけで，この式が何

らかの変分原理から導かれるものではない．散逸がある場合に，最小作用の原理から運動を導くことには，今のところ誰も成功していない．

5. 完全流体の変分原理

同様のことは，連続体の運動，すなわち流体についても言える．粘性のない流体を，**完全流体**と呼ぶ．完全流体では当然ながらエネルギーが保存する．その場合の変分原理がどのように表せるか見てみよう．座標 $\boldsymbol{x}$ における流体の速度場を $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t)$ とすると，完全流体の運動方程式は次の式で表すことができる．

$$\frac{D\boldsymbol{u}}{Dt} = -\frac{1}{\rho}\mathrm{grad}\, p + \boldsymbol{K}. \tag{19}$$

ただし，ρ は，流体の密度，p は圧力，$\boldsymbol{K}$ は流体に働く体積力を表す．これをオイラー方程式と呼ぶ．

ここで $\frac{D\boldsymbol{u}}{Dt}$ は，流体粒子の運動軌跡に沿った微分（ラグランジェ微分）であり，

$$\frac{D\boldsymbol{u}}{Dt} = \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} + (\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{u} \tag{20}$$

と表すことができる．ここでは，$(\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{u} = \sum_j \frac{\partial x_j}{\partial t}\frac{\partial u_i}{\partial x_j}$ の表記を用いている．

$\boldsymbol{K}$ が保存力で，ポテンシャル Ω から導かれるとすると $\boldsymbol{K} = -\mathrm{grad}\,\Omega$ から，(19) 式は，次の形に書くことができる[*1)]．

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} = -\mathrm{grad}\left(P + \frac{1}{2}|\boldsymbol{u}|^2 + \Omega\right) + \boldsymbol{u}\times\mathrm{rot}\,\boldsymbol{u}. \tag{21}$$

また，圧力関数を

$$P = \int \frac{dp}{\rho(p)} \tag{22}$$

とおいた．両辺と $\boldsymbol{u}$ の内積を取ると，右辺の最後の項は $\boldsymbol{u}$ に垂直なので 0 となり，次のようになる．

$$\boldsymbol{u}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}|\boldsymbol{u}|^2\right)$$

$$= -\boldsymbol{u}\cdot\mathrm{grad}\left(P + \frac{1}{2}|\boldsymbol{u}|^2 + \Omega\right).$$

ここで，$H = P + \frac{1}{2}|\boldsymbol{u}|^2 + \Omega$ とおくと，P, Ω は t に陽に依存しないので，(23) 式は次のように書ける．

$$\frac{\partial}{\partial t}H + \boldsymbol{u}\cdot\mathrm{grad}\, H = \frac{DH}{Dt} = 0. \tag{23}$$

すなわち，運動に沿って H が不変であることが示された．したがって，完全流体のラグランジアンを

$$L = T - U = \frac{1}{2}|\boldsymbol{u}|^2 - P - \Omega \tag{24}$$

とおくとオイラー・ラグランジェの式から

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{u}} = \frac{D\boldsymbol{u}}{Dt} = \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{x}} = -\mathrm{grad}\,(P+\Omega) \tag{25}$$

となり，完全流体の式が得られる．

粘性がある場合には，運動量の保存則から，次のナビエ・ストークス方程式を導くことができる．

$$\rho\left(\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} + \boldsymbol{u}\cdot\nabla\boldsymbol{u}\right) = -\nabla p + \eta\nabla^2\boldsymbol{u} + \rho\boldsymbol{K}. \tag{26}$$

ただし，散逸のある力学系の方程式を変分原理から導くことができなかったように，散逸のある流体の方程式を変分原理から導くことはできない．粘性 η が十分小さいとき，上の式は，時間的にも空間的にも乱れた乱流の振舞いを示すが，これを解析的に解くことはできない．これまで多くの乱流理論が作られ，統計的性質など多くの確立した結果が得られている．また，実験ともよく一致することがわかっているが，その一方で，かなり一般的な境界条件の下でナビエ・ストークス方程式の解の存在と一意性を証明することは，クレイ研究所の百万ドルがかかった懸賞問題の一つであり，いまだに解かれていない．

6. 可積分と非可積分

今，ハミルトニアン H で表される n 自由度の系に対して，独立な運動の恒量が n 個存在するとしよう．すると，適当な正準変換を選ぶことにより，作用変数 I_i と角変数 ϕ_i への

*1) $\mathrm{grad}\,(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}) = (\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{grad}\,)\boldsymbol{B} + (\boldsymbol{B}\cdot\mathrm{grad}\,)\boldsymbol{A} + \boldsymbol{A}\times\mathrm{rot}\,\boldsymbol{B} + \boldsymbol{B}\times\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A}$ の関係を用いた．

変換が可能となり，$(q_1, \cdots, q_n, p_1, \cdots, p_n) \rightarrow (\phi_1, \cdots, \phi_n, I_1, \cdots, I_n)$ の変数変換により，ハミルトニアンは，$H = H(I_1, I_2, \cdots, I_n)$ のように作用変数のみの関数で表すことができる．このとき，運動方程式は，次のようになる．

$$\dot{I} = -\frac{\partial H}{\partial \phi_i} = 0, \tag{27}$$

$$\dot{\phi} = \frac{\partial H}{\partial I_i} = \omega_i(I_1, I_2, \cdots, I_n). \tag{28}$$

このような場合，運動は n 個の独立な振動に分解され，軌道は単純な周期解または，多重周期解となる．$2n$ 次元の相空間の中で，n 個の運動の恒量があるため，運動は角変数のみに制約された運動とならざるを得ない．このとき，系は**完全可積分**であると言う．

7. 単振り子と2重振り子

図 1(a) のような単振り子の運動は，力の釣り合いを考慮すると，次のように簡単に表すことができる．

$$\ddot{\theta} = -gl \sin\theta. \tag{29}$$

ただし，g は重力加速度，l は振り子の長さを表す．単振り子では，摩擦がなければ，上で述べたように，時間に対する並進対称性からエネルギーが保存する．運動量については，どうだろうか．支点が固定されており，空間に特別な点があるため，空間に対する並進対称性は存在しない．したがって，運動量は保存しない．詳細に見れば，振り子が運動すると支点に力が加わり，同時に支点から振り子の棒に張力が加わる．この張力は，x 方向や y 方向の力の成分を持ち，x 方向，y 方向の運動量が変化するためである．同じように，重力が鉛直方向に働いていることから，空間の回転に対する対称性も成り立たない．したがって，角運動量も保存しないことがわかる．単振り子で保存するのは，エネルギーの和だけである．

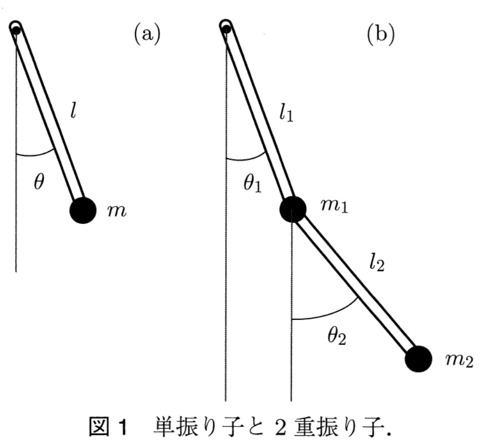


図1　単振り子と 2 重振り子．

一方，図 1(b) のような 2 重振り子ではどうだろうか．2 重振り子でも，2 つの質点の運動エネルギーと位置エネルギーの和は保存する．しかし，単振り子と同じように，運動量の和も角運動量の和も保存しない．座標変数は，角度 θ_1, θ_2 と 2 変数あるが，運動の恒量は，エネルギーのみで 1 つしか存在しない．このような系は，一般に非可積分である．実際にこのことを見てみよう．

2 重振り子の運動方程式を力の釣り合いだけから書こうとすると簡単ではない．しかし，ラグランジアンを用いると比較的簡単に求まり，

$$L = T - U, \tag{30}$$

$$T = \frac{1}{2}m_1(\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) + \frac{1}{2}m_2(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2), \tag{31}$$

$$U = -m_1 g l_1 \cos\theta_1 - m_2 g(l_1 \cos\theta_1 + l_2 \cos\theta_2) \tag{32}$$

である．座標 x_1, y_1, x_2, y_2 などを角度 θ_1, θ_2 を用いて表し，オイラー・ラグランジェの式

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} = \frac{\partial L}{\partial \theta_1}, \tag{33}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} = \frac{\partial L}{\partial \theta_2} \tag{34}$$

を用いればよい．結果は長くなるので省略するが，得られた方程式が解析的に解けるのは，振幅が非常に小さい場合のみであり，一般的に解くことは困難である．しかし，方程式は与えられたので数値的に解くことは可能である．図 2 は，ある初期条件の元に，数値的に解いたものである．

この非常に複雑な運動は，**カオス軌道**と呼ばれ，

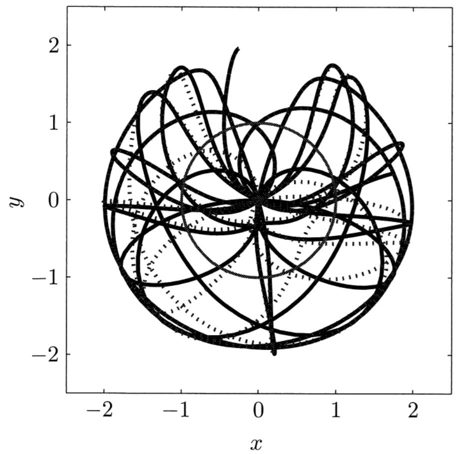


図2　2 重振り子の軌道の例．

一般に解析的に解くことはできない．図 2 の実線の軌道に対して，初期条件をわずか 10^{-4} だけずらしてスタートした場合の軌道を点線で示している．このようにわずかな初期条件の違いが無視できなくなり，長時間の後には全く異なる軌道を描くことがわかる．これがカオスの特徴である．一般に，カオス軌道とは，微小な初期条件の違いが指数関数的に拡大していく軌道のことを言い，次の**リアプノフ指数**により特徴付けられる．$\boldsymbol{x} \equiv (\theta_1, \theta_2)^T$ とおき，元の軌道の初期値 $\boldsymbol{x}(0)$ から，わずかにずれた軌道を $\boldsymbol{x}'(0) = \boldsymbol{x}(0) + \delta\boldsymbol{x}(0)$ とおき，時間発展させたとすると，リアプノフ指数は次のように定義される．

$$\lambda = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \ln \frac{||\boldsymbol{x}'(t) - \boldsymbol{x}(t)||}{||\delta\boldsymbol{x}(0)||}. \qquad (35)$$

安定な周期振動などでは，$\lambda < 0$ であり，初期値のずれは，時間とともに減衰するが，不安定な軌道では，初期のずれは，指数関数的に増大し，$\lambda > 0$ となり得る．カオスとは，$\lambda > 0$ の非周期軌道のことである．

8. 回転振り子から時間依存 GL 方程式へ

上で考えた回転振り子の式で，$l = 1, g = 1$ とおくと次のようになる．

$$\ddot{\theta} + \sin\theta = 0. \qquad (36)$$

ここで，θ は小さいが最低次の非線形項として，$\sin\theta \sim \theta - \frac{1}{3!}\theta^3 + \cdots$ とテーラー展開した際の，3 次の項までをとることにしよう．

$$\ddot{\theta} + \theta = \frac{\theta^3}{6}. \qquad (37)$$

線形部分の解は，角振動数が 1 の解，$\theta(t) = Ae^{it}$ で与えられるので，θ^3 を小さい摂動と考えて，摂動のある場合の解を $\theta(t) = A(\tau)e^{it}$ としよう．振幅 A は，摂動により，元の振動数に比べてゆっくりと変化するだろう．したがって，ϵ を小さいパラメータと考えて，$\tau = \epsilon t$, $A \sim O(\sqrt{\epsilon})$ とおいて，(37) に代入すると，$\partial_t^2 A = \epsilon^2 \ddot{A}$ などの関係から，ϵ の低次の項だけを残すと，

$$\begin{aligned}2i\dot{A} &= -2A + \frac{1}{6}(A^3 e^{2it} + 3A^2\bar{A} \\ &\quad + 3A\bar{A}^2 e^{-2it} + \bar{A}^3 e^{-4it})\end{aligned} \qquad (38)$$

となる．ここでは，振幅 A のゆっくりした変化のみを考えているので，上式を振動の 1 周期にわたって平均してもよい．すると，$e^{2it}, e^{-2it}, e^{-4it}$ などの項は，平均化ですべて消えて以下の式が得られる．

$$\dot{A} = iA - \frac{i}{4}|A|^2 A, \qquad (39)$$

これは，スチュアート・ランダウの式と呼ばれる．

次に，たくさんの振り子がバネで相互作用しながらつながっている場合に，最低次の非線形項を含む振幅方程式を求めると，次のような複素係数の時間依存ギンズブルグ・ランダウ（GL）方程式が得られる．

$$\dot{A} = (\mu + i\omega)A + (1 + i\alpha)\partial_x^2 A - (1 + i\beta)|A|^2 A \qquad (40)$$

ここで，$i\omega$ の項は，$A = A' e^{i\omega t}$ とおくと，右辺と左辺で $i\omega A'$ の項が相殺するので，常に消去可能である．したがって，

$$\dot{A} = \mu A + (1 + i\alpha)\partial_x^2 A - (1 + i\beta)|A|^2 A \qquad (41)$$

と書くことができる．散逸の大きい極限を考えて，右辺の係数のうち，虚数の項が実数の項に比べて無視できるほど小さいとすると，次の実係数の GL 方程式が得られる．

$$\dot{A} = \mu A + \partial_x^2 A - |A|^2 A. \qquad (42)$$

9. 保存と非保存の極限——ソリトンとカオス

実係数の GL 方程式に関しては，ポテンシャルが存在する．ポテンシャル密度を F とし，

$$\mathscr{F} = \int dx F = \int dx \left\{ -\mu|A|^2 + \frac{1}{2}|A|^4 \right\} \qquad (43)$$

とおくと，A の時間発展方程式は，

$$\dot{A} = -\frac{\delta\mathscr{F}}{\delta A^*} = -\frac{\partial F}{\partial A^*} \qquad (44)$$

のように汎関数 $\mathscr{F}$ の変分から導くことができる．このときの $\mathscr{F}$ の時間変化を見てみると，

$$\begin{aligned}\dot{\mathscr{F}} &= \frac{\delta\mathscr{F}}{\delta A}\dot{A} + \frac{\delta\mathscr{F}}{\delta A^*}\dot{A}^* \\ &= (-\mu A^* + |A|^2 A^* - \partial_x^2 A^*)\dot{A} \\ &\quad + (-\mu A + |A|^2 A - \partial_x^2 A)\dot{A}^* \\ &= -2|\dot{A}|^2 \leq 0\end{aligned} \qquad (45)$$

となり，運動に伴い $\mathscr{F}$ は減少することが分かる．このような場合，系の終状態は，すべての座標で A がポテンシャルの極小点に到達するか，図 3 のようにキンクを含む準安定な解となる．

一方，これまでとは逆に，散逸がない極限を考え，(41) 式で係数の虚数部が実数部に比べて十分大きいとしよう．このとき，

$$i\dot{A} = -\alpha\partial_x^2 A + \beta|A|^2 A \qquad (46)$$

のようになるが，これは非線形シュレジンガー方程式と呼ばれ，次のハミルトニアンを持つ．

$$\mathscr{H} = \int dx H = \int dx \left\{ \alpha|\partial_x A|^2 + \frac{\beta}{2}|A|^4 \right\}. \qquad (47)$$

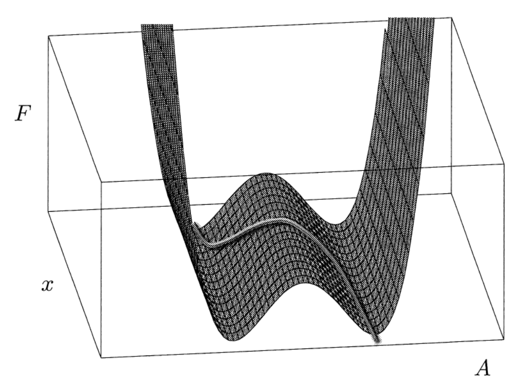


図 3　実係数 GL 方程式のキンク解．

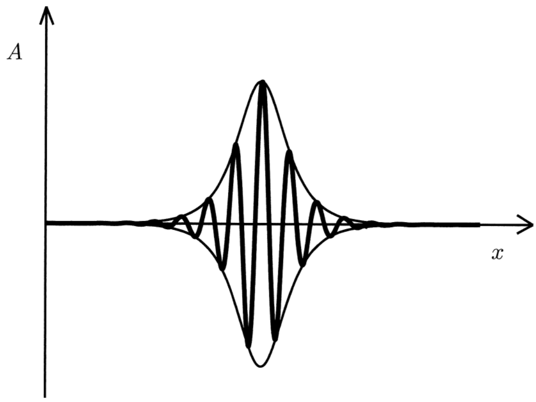


図 4　非線形シュレジンガー方程式のソリトン解．

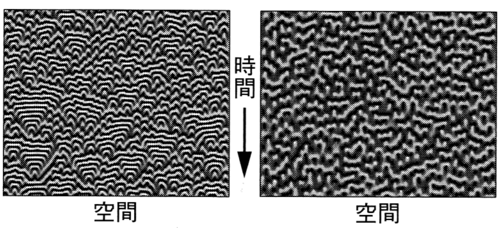


図 5　CGL 方程式の解の例．

実際に (46) 式は，次の正準方程式から導かれる．

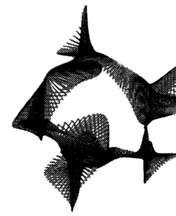
$$\dot{A} = \frac{\delta \mathscr{H}}{\delta A^*}, \qquad \dot{A}^* = -\frac{\delta \mathscr{H}}{\delta A}. \tag{48}$$

(46) 式は，$\alpha = \frac{\beta}{2}$ とすると，図 4 のような，ソリトン解と飛ばれる孤立波の解を持つことが知られている．このとき，無限個の運動の恒量があり，系は完全可積分である．

(41) 式の**複素係数 GL 方程式**（**CGL 方程式**）は，ポテンシャルも存在しなければ，ハミルトニアンも存在しないため，その解は一般に複雑なものとなる．図 5 に示した数値解の例のように，時間的にも空間的にも乱れた解が生じ，これを時空カオスと呼ぶことがある．CGL 方程式は，ナビエ・ストークス方程式よりも単純な方程式であるが，乱流解を持つ方程式の一種である．その乱流への転移がどのような法則に従うかは，まだ解明されていない．これも未解決問題である．

（さの・まさき，東京大学大学院理学系研究科）

量子力学におけるエネルギー



小形　正男

量子力学におけるエネルギーといえば，単純に

$$\mathcal{H}\psi(\boldsymbol{r}) = E\psi(\boldsymbol{r}) \tag{1}$$

と表される．これは**シュレーディンガー方程式**で，$\psi(\boldsymbol{r})$ は波動関数，E はエネルギー固有値，$\mathcal{H}$ は**ハミルトニアン演算子**である．ここで演算子というのは，「微分する」とか，「ポテンシャル関数を掛け算する」というような「演算」を**波動関数** $\psi(\boldsymbol{r})$ に作用させるものである．不思議なことだが，量子力学では物理量は演算子であると考え，(1) 式右辺の実数 E が $\psi(\boldsymbol{r})$ という状態にいる場合のエネルギーの測定値となると考えるのである（E を**固有値**，$\psi(\boldsymbol{r})$ を**固有関数**ともいう）．こう考えると実験を非常によく説明できる．

一言で量子力学におけるエネルギーというと，(1) 式で終わってしまうのだが，それでは原稿にならないので，この項では (1) 式にまつわるあれやこれやのことを，個人的な独断で書き述べることにしてみよう．

1. 運動エネルギーとポテンシャルエネルギー

1.1 運動エネルギー

力学の教科書的には，エネルギーは運動エネルギーとポテンシャルエネルギーからなる．**運動エネルギー**は古典力学では速度 v を使って $\frac{1}{2}mv^2$ と書ける．量子力学でも基本的には同じであるが，粒子の位置と速度が同時に決まらないとする．さらに粒子の状態は波であるとするのだ．このことから，速度 v の代わりに**運動量** p を考えて，さらにそれが「偏微分演算子」$\frac{\partial}{\partial x}$ に比例するものとして

$$p = -\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial x} \quad (\hbar \text{ はプランク定数}) \tag{2}$$

と書くのである（話を簡単にするために，座標は x だけ考える）．運動エネルギーは $\frac{p^2}{2m}$ なので，p に (2) 式を代入して「運動エネルギーの演算子」は

$$\frac{p^2}{2m} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} \tag{3}$$

となる．

ポテンシャルが 0 であれば，エネルギーに対応するハミルトニアン演算子は，この運動エネルギーだけになる．これを (1) 式に用いると，波動関数 $\psi(\boldsymbol{r})$ は，2 階微分して自分に戻るものを考えればよい．これにちょうどよいのが，波を表現するときに使う，いわゆる「**平面波**」$\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}$ である．実際にこの関数にハミルトニアン演算子を演算すると，

$$\mathcal{H}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} = \frac{\hbar^2k^2}{2m}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} \tag{4}$$

となり，(1) 式と同じ形の式となる．右辺の $\frac{\hbar^2k^2}{2m}$ が「運動エネルギーの固有値」なので，粒子が平面波の状態にいる場合に運動エネルギーを測定すると，$\frac{\hbar^2k^2}{2m}$ が測定値として得られることになる．

1.2 ポテンシャルエネルギー

次はポテンシャルエネルギーである．ミクロの世界では，例えば水素原子中の電子は中心の原子核からクーロン引力を受ける．これをポテンシャルエネルギーとして言い換えると，電子は原子核が作る**クーロンポテンシャルエネルギー**を感じながら運動しているということになる．力学で習うように，ポテンシャル $V(x)$ を座標で（偏）微分して逆符号にしたものが力になるので，そうなるようにポテンシャルを決めればよい．クーロン引力は距離 r の二乗，つまり r^2 に反比例するから，これを生み出すクーロンポテンシャルエネルギーは r に反比例するものである．

また，粒子が何かに閉じ込められている場合には「閉じ込めポテンシャル」があると考えればよい．例えば

固体中の電子は，その物質内に閉じ込められている．この場合は物質の中と外でポテンシャルエネルギーが異なっていると考えればよい．ちょうど金属表面にポテンシャルエネルギーの「壁」があることになる．

2. 調和振動子と零点エネルギー

よく使われる例は，**調和振動子**のポテンシャルというものである（図 1）．これは力学では，振り子の運動やバネの運動に対応するものである．量子力学でも平衡位置を $x=0$ とすれば，その周りの微小振動が調和振動子となっていることが多い．この場合のポテンシャルは x^2 に比例するものを考える．例えば結晶中では，原子は周期的に並んでいる．この状態は，1 つ 1 つの原子がお互いにバネでつながっていて平衡状態にあると考えてもよい．その中の 1 つの原子がどちらか一方に動こうとすると，周りの原子から及ぼされるバネの力で平衡位置に戻ろうとする．これが調和振動子のポテンシャルである．結晶の格子振動はこれで理解できる．

この場合のシュレーディンガー方程式は

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{m}{2}\omega^2x^2\right)\psi(x)=E\psi(x) \qquad (5)$$

のようになる．ここで ω は角振動数．この式を満たす波動関数 ψ を考えてみよう．平面波 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}$ は，この式を満たさない．なぜなら，ポテンシャル $V(x)=\frac{m}{2}\omega^2x^2$ を平面波に掛け算すると，$x^2\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}$ という形がでてくるが，これは関数 $E\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}$ の形ではないからである．つまり平面波の波動関数はこの場合には固有関数ではない．

代わりに，(5) 式を満たすような波動関数は，例えば

$$\psi_0(x)=A\mathrm{e}^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2} \quad (A\text{ は適当な係数}) \qquad (6)$$

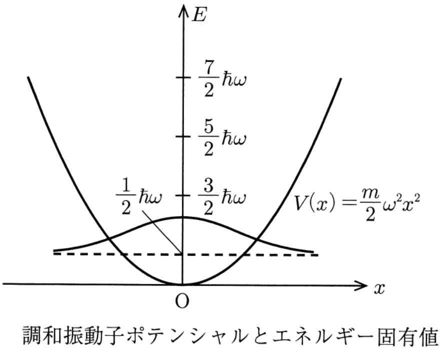


図 1　調和振動子ポテンシャルとエネルギー固有値と最低エネルギーの固有関数．

のようになっていればよいことがわかる．(5) 式に代入すると確かに $E=\frac{1}{2}\hbar\omega$ として成立する．これは固有関数の一例であり，実際には無限個の固有関数が得られる．(5) 式を物理数学などを使って解くと，固有エネルギーが $E=\hbar\omega\left(n+\frac{1}{2}\right), n=0,1,2,\cdots$ という飛び飛びの値になることが分かる（図 1）．この結果は**プランクの量子仮説**の根拠を与えている．プランクは，エネルギーが $\hbar\omega$ の単位で飛び飛びになるということと，**量子統計力学**を併せて考えることによって**黒体輻射**の謎を解いたのである．力学の振り子やバネの運動から類推して作られた，普遍的に現れる量子力学の方程式が，非常に単純なエネルギー固有値の系列を与えるということは驚くべきことだと思う．たまたまなのか，何か必然的な理由があるのかはよくわからない．

2.1 零点エネルギー

このようにエネルギー固有値は $\frac{1}{2}\hbar\omega$ から始まる．つまり $E=0$ であるような解は存在しない．これは量子力学の深淵に関わっている結果である．古典力学では粒子の位置が $x=0$ で運動量が 0 である状態は可能である．このときのエネルギーは $E=0$ である．しかしこのような状態は量子力学では許されない．量子力学では**不確定性原理**が成立すると仮定しているので，粒子の位置座標と運動量は同時に決まることはない．したがって両方 0 ということはなく，エネルギーは正ということになる．

この最低エネルギー $\frac{1}{2}\hbar\omega$ を**零点エネルギー**と呼んでいる．ここで概念的に難しいことが生じる．もしこのような調和振動子がいくつもあるとすると，基底状態（エネルギーが最低の状態）の全エネルギーは 0 ではなく，$\frac{1}{2}\hbar\omega\times$(調和振動子の数) $\to$ 無限大，となってしまう．例えば，真空中でも電磁波は存在し得るが，電磁波の量子力学を行うと（実際はちょっと難しいが），やはり調和振動子のハミルトニアンが出てくる．これは**光子**の量子力学ということになる．電磁波の波長はいろいろな値が可能だから，それぞれの波長の電磁波について零点エネルギーが存在する．そうすると基底状態の真空にも無限の零点エネルギーが充満していることになってしまう．

しかしこれがダークエネルギーというわけではない．実際には，この無限の零点エネルギーは気にしないことになっている．つまり，通常の物理学ではエネルギーの原点の取り方の問題であるとして，取り合わない．エネルギーが問題になるのは，その絶対値ではなく，エネルギーの変化分であると考えれば，エネルギーの

原点がどこにあっても構わないのである．

3. 相互作用エネルギー

さて，量子力学におけるエネルギーであるハミルトニアンに戻ってみよう．ハミルトニアンは運動エネルギーとポテンシャルエネルギーで書けた．例えば**水素原子**のときは，中心の原子核が作るクーロン場がポテンシャルエネルギーだった．

しかし，中心の原子核も含めて水素原子全体を考えるならば，電子の感じるポテンシャルエネルギーだけでは足りないことがわかる．原子核も電子からの引力を受けるはずだからである．このことを考慮するには，「ポテンシャル」としてエネルギーを捉えるのではなく，「**相互作用**」としてエネルギーを捉えたほうがよい．クーロンポテンシャルは中心からの距離 r に反比例していたが，相互作用として考える場合には，r を 2 つの粒子間の距離 $|\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2|$ に置き換えればよい．したがって，水素原子の場合，1 つの原子核（陽子）と 1 つの電子を両方とも量子力学で扱うとするならば

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial \boldsymbol{r}_1^2}-\frac{\hbar^2}{2M}\frac{\partial^2}{\partial \boldsymbol{r}_2^2}-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{|\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2|} \qquad (7)$$

というハミルトニアンを考えればよい．ここで m は電子の質量，M は原子核の質量，$\boldsymbol{r}_1$ は電子の座標，$\boldsymbol{r}_2$ は原子核の座標である．(7) 式の第 3 項が**クーロン相互作用**である．

このように捉えられる相互作用エネルギーは，クーロン相互作用だけとは限らない．**重力**もクーロン相互作用と同じように r に反比例する相互作用であるが，クーロン相互作用とは全く別種の相互作用である．この他に，原子核の中で働く「**強い相互作用**」と，ある種の粒子間に働く「**弱い相互作用**」がある．現在の物理学ではこの 4 種類の相互作用がすべてであると考えられている．というか，第 5 の相互作用を見い出す，という努力（研究）も行われてはいるのだが，(まだ) 見つかっていないというのが正しいだろう．

強い相互作用と弱い相互作用は，素粒子の世界のことなので，力学的に理解するのは難しい．またポテンシャルの形で書くことも難しい．実際には素粒子の生成消滅の「演算子」というものを定義して，これを用いて書かれる相互作用である．これらのことを理解するには，量子力学から一歩進んだ**場の量子論**というものを使わないといけない．場の量子論とは，多少抽象的な「光子の場」(つまり電磁場) や中間子の場というものを考えて，その「場」というものを量子化して調和振動子のようにして扱うという学問である．

3.1 素粒子論と物性論

現代の素粒子論では，ハミルトニアンを自由に仮定して理論を発展させることも行われている．もちろん，相対性理論と矛盾しないなどの制限はあるが，その範囲内で自由に相互作用を仮定し，それから導き出される結果が，知られている事実と矛盾しないか，あるいは**大統一理論**として 4 つの相互作用を導き出すことができるかというようなことを研究している．

これに対して，**物性論**というのは身の周りの物質から低温，超低温の物質の状態を研究しようというものである．例えば超伝導はなぜ起こるか，磁石の本質は何か，相転移はなぜ起こるか，金属・半導体・絶縁体の違いは何か，これらをコントロールすることはできるか . . . などの学問である．いずれにしても粒子数が多い場合の問題となる．身の周りの物質にはアボガドロ数 (10^{23}) のオーダーの原子や電子が詰まっているので，これらすべてを取り扱わなければならない．

一方，素粒子論では，基本的に少数粒子系の問題を取り扱っている．例えばヒッグス粒子の生成と崩壊，陽子の崩壊，電子と陽電子の衝突などが問題になる．物性論では，超多粒子の問題になっていて問題を解くのが大変なのだが，代わりに（身の周りの現象なので)，相互作用としては 4 つのうち基本的にはクーロン相互作用だけを考えればよい（！）(あとで追加すべき相互作用を考える)．したがって，エネルギーを表すハミルトニアンは書き下すことができて，

$$\mathcal{H}=-\sum_j\frac{\hbar^2}{2m_j}\frac{\partial^2}{\partial \boldsymbol{r}_j^2}+\sum_{i\neq j}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e_ie_j}{|\boldsymbol{r}_i-\boldsymbol{r}_j|} \qquad (8)$$

となる．ここで j は物質を構成しているすべての粒子に番号をつけたもので，m_j, e_j はその質量と電荷，$\boldsymbol{r}_j$ は座標などとなっている．ただし i や j の和はアボガドロ数のオーダーまでである．物質を構成する粒子は，原子核だったり電子だったりする．これに伴ってシュレーディンガー方程式で解くべき波動関数 ψ もアボガドロ数ほどの座標 $\boldsymbol{r}_j$ をもった超多変数関数として求めなければならない．

3.2 More is different!

さて，物性論ではハミルトニアンが確定したので，あとはこれを解くだけ，と思われるかもしれないが，そうは問屋がおろさない．そこが物性論の面白いところだと思う（筆者はこちらが専門)．

昔の偉い先生が，ハミルトニアンは決まっているので，あとはコンピュータで微分方程式を解くだけである．したがって物性論は終わった，と述べたことがあった（といわれている）．現在のコンピュータの能力ではアボガドロ数は無理だとしても，将来，「京」コンピュータの数世代後の超大型超並列グローバルネットワーク・ハイパーウルトラスーパーコンピュータが完成したあかつきには，ほぼ現在の問題は解けるだろうという意味である．

しかし，これは間違っている．つまり力づく（brute force）で多粒子ハミルトニアンを解いても，正しい答が得られないということがわかっている．技術的に多粒子を扱うのが困難ということ以外に，多粒子（とくに自由度が無限大）になることによって，物性（ものの性質）の様相が一変するのである．典型的な例は，**相転移現象**である．例えば水が氷になる現象はハミルトニアンを力づくで解いてもわからない．第一「温度」という要素がハミルトニアンには入っていないのである．相転移の一種としての**超伝導現象**も理解できないであろう．

これを一言でいうと“More is different.”ということになる（P.W. アンダーソンの造語）．多粒子であることによって，少数系とは本質的に異なった物理現象が生じる（**創発する**）という意味である．相転移が起こること，数多くの元素があっていろいろな組合せの物質があること，水や氷や空気や動物・植物がいること，私たちが生きていること，これらが世界の多様性を生み出しているのである．

4. 摂動

さて，相転移現象や超伝導に入ると，話がとめどなく面白くなるのだが，それでは「量子力学におけるエネルギー」ということから果てしなく離れてしまう．そこで，再びエネルギー問題に復帰しよう．素粒子はさておき，ほぼ全世界は運動エネルギーとクーロン相互作用によって決まっている．しかしそれに含まれない小さな相互作用もある．

4.1 スピン・軌道相互作用：相対論の効果

1つ重要なものは**スピン**である．原子核や電子などすべての素粒子は，クーロン相互作用の電荷とともにスピンという内部自由度をもっている．スピン0だと持っていないのと同じだが，陽子も中性子も電子もスピン $\frac{1}{2}$ を持つ（$\hbar$ を単位とする．以下同じ）．さらに

水素原子で習うように，電子の状態には**軌道角運動量**があって，0, 1, 2 などの角運動量をもち，これらはスピンと同じように重要な働きをするのである．

磁石（強磁性）などの磁性はほとんど物質中のスピンから生じるものであるし，超伝導においても上向きスピン（スピン $\frac{1}{2}$）と下向きスピン（スピン $-\frac{1}{2}$）を持つ電子が対を作ったクーパー対というものが本質的に重要な役割を果たしている．エネルギーの観点からは，クーロン相互作用に含まれないものとして**スピン・軌道相互作用**というものがある．これはスピン演算子 $\boldsymbol{S}$ と軌道角運動量演算子 $\boldsymbol{L}$ の積として書ける．

実は今まで内緒にしていたが，シュレーディンガー方程式 (1) は相対論的になっていない．つまりローレンツ不変性などを考慮していない形になっている．ディラックが最初考えたように，シュレーディンガー方程式を特殊相対論と Compatible にするには，波動関数を 4 成分の縦ベクトルとして，ハミルトニアンも 4×4 の行列（と偏微分）で書かなければならない．4 成分は電子と**陽電子**，およびそれぞれのスピン $\frac{1}{2}$ の自由度ということに対応する．これを**ディラック方程式**という．

相対論的エネルギーから古典力学の運動エネルギーが出るように，ディラック方程式からシュレーディンガー方程式が出る．4×4 のディラック方程式を直接解かずに，陽電子の部分は基底状態（陽電子の海）として考慮してしまい，電子状態だけのハミルトニアンに書き換えると，非相対論的極限でシュレーディンガー方程式が得られる．しかし相対論の効果のためにおつりの項が現れ，その 1 つがスピン・軌道相互作用ということになる．

定性的には，原子内の電子は原子核のすぐ近くまでくると，加速されて運動量の期待値が大きくなる．そうすると原子内でも電子のスピードが光速に近づく．このため相対論の効果が出てくるのである．このことから分かるように，原子番号 Z が大きいと，原子核のプラス電荷 Z が大きいので，電子のスピードも大きい．このため原子番号が大きい（つまり周期表で下のほうの）原子で，スピン軌道相互作用が強くなるのである．

4.2 スピントロニクス

さて，スピン軌道相互作用を使った例を考えてみよう．最近のテクノロジーの 1 つとして，スピンをコントロールして新しい素子としようという試みがある．今までの半導体，コンピュータなどはすべて電荷を動かしている．これがエレクトロニクスである．携帯も GPS もカーナビもすべて電荷で動いている．

これに対してスピンを使うのが**スピントロニクス**である．スピン $\frac{1}{2}$ の場合はスピンが上向きとスピンが下向きの 2 通りがある．これを 0 と 1 の 1 ビットとして扱えないかというのが，一番単純な発想である．スピンを反転させるのは，磁場や隣のスピンなど，いろいろ可能であり，かつ，ここが重要な点なのだが，スピンを反転させるのにほとんどエネルギーが必要ないのである．

電荷を動かすと電流になるが，そうするとジュール熱の発生が必ず問題となる．コンピュータを使うと熱くなってくるのはこのせいである．コンピュータは内臓された扇風機やクーラーで冷やし続けないと，熱くなって暴走してしまう．これに比べてスピンを操作することができれば，エネルギーコストが少ない．つまり電子が動かなくても，スピンの情報だけを伝えればよいのである．そのために，スピン波という波を使うこともできるかもしれないし，電流が流れずスピンだけ流れる「**スピン流**」というものも研究されている．スピンは古典力学では理解できないものであり，本質的に量子力学的なものである．そのためスピン反転は量子力学的な「遷移」や「トンネル効果」として起こすことができる．それでエネルギーが少なくてすむのである．

スピンをコントロールするときのキーパラメータとしてスピン・軌道相互作用が大活躍する．軌道とスピンが絡み合っているので，軌道を操作することにより，スピンを操作することができる．スピン軌道相互作用はとても小さなエネルギーなのだが，うまく使うと新しくて面白い現象を生み出すことができる．スピン・軌道相互作用はテクノロジーのフロンティアなのだ．

4.3 磁場効果

摂動として外部磁場をかけることがある．物性論では磁場の効果というのが面白い現象をいろいろと与える．

磁場の効果は，まずは力学ではおなじみのローレンツ力 $e\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}$ である（これ以外に，ディラック方程式からスピンと磁場の相互作用が得られる）．ローレンツ力は確かに「力」なのであるが，単純にポテンシャルの形では書けない．ハミルトニアンの形でこのローレンツ力を与えるようにするには，磁場 $\boldsymbol{B}$ ではなく，電磁気学で習う**ベクトルポテンシャル** $\boldsymbol{A}$ というものを用いて，$\boldsymbol{p} \to \boldsymbol{p} - e\boldsymbol{A}$ と置き換えればよいということが分かっている．$\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{B}$ の関係は $\boldsymbol{B} = \mathrm{rot}\boldsymbol{A}$ で

ある．こうすると運動エネルギーは

$$\frac{1}{2m}(\boldsymbol{p}-e\boldsymbol{A})^2 \tag{9}$$

となる．なぜこれでよいのかということを初等的に説明するのは少し難しい．解析力学などで勉強していただくしかない．磁場の向きを z 軸としたとき，$\mathrm{rot}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$ が成り立つためには，例えば $\boldsymbol{A}=(0,xB,0)$ とすればよい．

4.4 磁場中のエネルギー

磁場がないときは，量子力学であっても運動量の期待値が 0 という平面波の状態（$k=0$ の状態）が可能で，最低エネルギーは $E=0$ である（相互作用はないとする）．一方，磁場があるときハミルトニアンは (9) 式となる．古典力学では再び $\boldsymbol{p}-e\boldsymbol{A}=\boldsymbol{0}$ を満たすものを選べば，エネルギーは 0 である．しかしこれと同じような状況を量子力学で実現することはできない．ベクトルポテンシャル $\boldsymbol{A}$ が座標に依存するために，$\boldsymbol{p}$ と $\boldsymbol{A}$ とが両方同時に確定値をとるような状態を作ることができないのが理由である．

このような困難があるが，実は (9) 式を用いたシュレーディンガー方程式は厳密に解くことができる．数式で示すには少し準備がいるのでここではやらないが，ちょうど第 2 節で扱った調和振動子と同じような形に変形することができて，エネルギー固有値と波動関数が求められる．その結果が図 2 のようになる（空間 2 次元の場合）．調和振動子の場合と同じようにエネルギーが飛び飛びとなり，最低エネルギーが $\frac{1}{2}\hbar\omega$ となる状況も調和振動子と同じである（ただし $\omega=\frac{|e|B}{m}$）．

例えば，電子が少ない場合を考えてみよう．磁場が 0 の場合，電子は $E=0$ 付近のエネルギーの低い状態をとることができる（図 2 の左側の斜線の部分に電子が詰まっている）．この状態に磁場をかけると，図 2 の右側のような $\frac{1}{2}\hbar\omega$ の状態に電子が詰まる（$\frac{1}{2}\hbar\omega$ の状態は縮退していて，左側の点線で挟まれた部分の状態は全部ここに集中している）．図からわかるように，電子のエネルギーは磁場をかけることによって上がるのである．

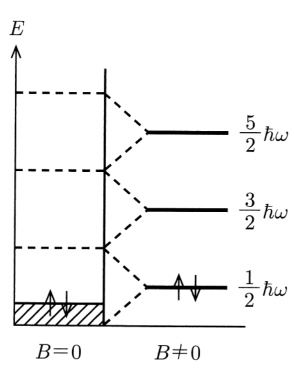


図 2 磁場がないとき（左）と磁場がかかったとき（右）のエネルギー固有値．↑,↓ は詰まっている電子を表す．

多くの物質（常磁性物質）では，磁場をかけると，磁場と同じ方向に磁化が生じる．磁場と同じ方向に磁化が向くと全エネルギーが下がる．このような状態を常磁性という．これに対して，図 2 で見たように，電子系に磁場をかけると全エネルギーが上がってしまう．つまり巨視的にみると，磁場と反対向きの磁化が生じてエネルギーが上がったことになる．このような状態を**ランダウの軌道反磁性状態**という．

4.5 固体中のディラック電子

固体中であっても，電子の運動エネルギーを $\frac{p^2}{2m}$ で記述してもよい場合があるが，物質特有のバンド構造によっては，相対論的ディラック方程式と同じようなモデルが妥当になる場合がある．例えば炭素が 2 次元の蜂の巣格子の形に整列した**グラフェン**という物質や，原子番号 83 番の**ビスマス**（Bi），あるいはある種の有機導体では固体中でディラック電子が実現していると考えられている．

陽電子と電子との間の**エネルギーギャップ**は，相対論によると $2mc^2$ であって 1.6×10^{-13} ジュールのエネルギーに相当する．この大きさのエネルギーを真空に与えれば，陽電子と電子が対生成する．このエネルギーは小さいようだが，ミクロの世界では相当大きいエネルギーである．これに対して，固体中のディラック電子の場合，エネルギーギャップは圧倒的に小さい．例えばグラフェンや有機導体では 0，ビスマスでは $2mc^2$ の一億分の一くらい小さくなっている．本来の陽電子の生成には加速器による巨大なエネルギーが必要であるが，固体中ではエネルギーがとても小さいために，簡単な摂動，または熱エネルギーによって陽電子・電子の対生成・対消滅が可能な状況なのである．

これら固体中のディラック電子を使って，何か特別な現象が起こらないかどうか研究が続けられている[1)]．例えば，上記のランダウの軌道反磁性と異なるメカニズムによってビスマスにおいて巨大な反磁性が生じている．またスピントロニクスとの関係でスピン流や**スピンホール効果**についても研究が開始されている．

5. 熱流のフロンティア

最後にエネルギーということで，**熱エネルギー**について述べよう．物性論では熱エネルギーの流れというものも，とても面白い研究の対象となっている．

例えば物質に温度勾配をかければ，温度の高い部分で熱エネルギーが大きくなる．つまり熱エネルギーの空間分布を人工的に作り出すことができる．このように温度勾配があると，平衡状態になろうとして，エネルギーが高温部分から低温部分へと流れようとする．もしそこに電子がいれば，熱流とともに電子も流れることになり，電流が生じる．電流が生じて試料の片側に電子がたまれば，電圧が発生する．

つまり，温度勾配があると物質の両端に電位差が生じる．これをうまく利用すれば温度差から発電をすることができる．実際に夏場の暑い室外と，ガラス窓1枚を隔てて涼しい室内が隣り合っていることが多い．このような状況の温度差を用いて発電ができれば，とてもエコである．

ただ熱流を理解しようとする場合，いろいろとわかっていない面も多く，現在でもいろいろな研究が続けられている．根源的な問題は，温度勾配を電場や磁場のような「外場」として表すことができないという点である．電場の場合は静電ポテンシャル，磁場の場合はベクトルポテンシャルとしてハミルトニアンの中に含めることができる．しかし温度勾配の場合には，単純にいかない．温度は統計力学において系全体の平衡状態から定義されるものである．そのような温度が局所的に違う場合，単純にポテンシャルの形に書けないので，苦労して理論が立てられている．純粋理論上も，応用上でも，熱流のコントロールということも1つの物性論のフロンティアなのである．

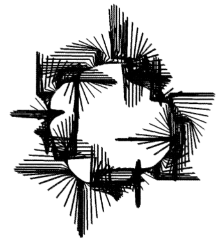
参考文献

1) 単なる宣伝だが,「固体中のディラック電子」としての研究プロジェクトは http://www.kookai.pc.uec.ac.jp/dirac/

（おがた・まさお，東京大学大学院理学系研究科）

自由エネルギーと熱力学第二法則

マクロな世界でのエネルギー



田崎 晴明

■ 1. 力学におけるポテンシャルエネルギー ■

ここでは，高校生にもわかる入試問題風のバネと気体の問題を入り口にして，マクロな世界でのエネルギーのやりとりを規定する熱力学第二法則の神髄を説明し，最後は，私がまさに今取り組んでいる研究の動機を説明してみようと思う．

図 1 のように，バネ定数 k，自然長 l のバネの左端を固定し，右端に質量 m の質点を付けた．はじめ，バネの長さが l_1 の状態で，質点を手で押さえて静止させる．ここから，バネの長さが l_2 になるまで，質点を手でもったままゆっくりと動かした．ただし，$0 < l_1 < l_2 < l$ としよう（つまり，バネが自然長より縮んでいる状況から少し伸ばす）．

手を動かす向きとバネが手を押す力の向きは同じだから，手はバネから力学的な仕事（以下では，単に仕事と書く）をされる．バネから仕事が取り出されると言ってもいい．

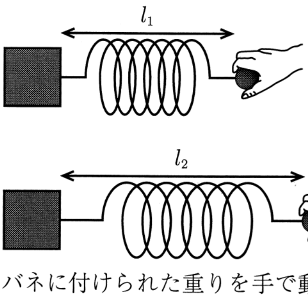


図 1　バネに付けられた重りを手で動かし，バネの長さを l_1 から l_2 まで変化させる．途中，どのような動かし方をしようと，取り出される仕事は $W = U(l_1) - U(l_2)$ である．

この仕事の総量 W を求めよう．「それは，バネのポテンシャルエネルギー（位置エネルギー）から即座に計算できる」という人も多いだろう．実際にそれが正解なのだが，後のこともあるので，仕事の定義に戻って落ち着いて考える．

ある時点でのバネの長さを x とする．このとき，手がバネから受ける力は（右向きを正として）$f(x) = k(l - x)$ である．バネの長さが x からわずかに $x + \Delta x$ まで伸びる間の仕事は（力を一定と近似して）「力 × 距離」だから $f(x)\Delta x$ になる．これを x を l_1 から l_2 まで動かして足し合わせたものが求めたい仕事 W だ．この和は，$\Delta x \downarrow 0$ の極限で $\sum f(x)\Delta x \to \int_{l_1}^{l_2} f(x)dx$ のように積分で表わされる．積分は簡単に計算できて，

$$
\begin{aligned}
W &= \int_{l_1}^{l_2} f(x)dx = \int_{l_1}^{l_2} k(l-x)dx \\
&= kl[x]_{l_1}^{l_2} - \frac{k}{2}[x^2]_{l_1}^{l_2} \\
&= kl(l_2 - l_1) - \frac{k}{2}\left\{(l_2)^2 - (l_1)^2\right\} \qquad (1)
\end{aligned}
$$

となるが，このままでは，あまり見通しがよくない．ここで，バネの**ポテンシャルエネルギー**を

$$
U(x) = \frac{k}{2}(l-x)^2 \qquad (2)
$$

と定義すれば，(1) は

$$
W = U(l_1) - U(l_2) \qquad (3)
$$

というきれいな形になる．ご存知のように，$U(x)$

はバネの長さが x のときに「バネに蓄えられているエネルギー」である．長さが l_1 から l_2 に変化したのだから，**それらの状態での $U(x)$ の差が仕事として取り出された**と考えられる．

先に進む前に，今の結果をさらに深めておこう．上では，質点をゆっくりと動かすとしたが，実は，その仮定は必要ないのだ．「最初にバネの長さが l_1 で質点が静止しており，最後はバネの長さが l_2 で質点が静止している」という条件さえ満たされていれば，途中では，質点を素早く動かそうが，引っ張ったり押したりしてぐにゃぐにゃ動かそうが，何をしたところで，手がバネからされる仕事の総量 W はちょうど (3) になるのである．

これは決して当たり前の事実ではないし（というより，驚くべき事実だと思う），導出も決して難しくないので，以下に見ておこう．先を急ぐ人は，この導出は飛ばしてもいい．

時刻 0 から時刻 T の間に質点を動かす．時刻 t での質点の位置を $x(t)$，速度を $v(t)=dx(t)/dt$ とし，また，手が（質点を介して）バネから受ける力を $f(t)$ とする．

$\varDelta t$ を短い時間間隔とする．時刻 t から $t+\varDelta t$ の間に質点および手が移動する距離は $\varDelta x = v(t)\varDelta t$ である．よって，この間に手がされる仕事は $f(t)\varDelta x = f(t)v(t)\varDelta t$ である．これを全時間について足し合わせたのが求める仕事だ．つまり，

$$W=\int_0^T f(t)v(t)\,dt \tag{4}$$

という積分で，取り出される仕事の総量が表わされる．とはいっても，手をどう動かしたかによって $f(t)$ や $v(t)$ の形は複雑に変わるだろうから，(4) の積分が計算できるとはなかなか思えない．

質点の運動に注目しよう．質点には，手が受ける力の反作用 $-f(t)$ とバネからの力 $k\{l-x(t)\}$ の両方が働く．よって，質点の運動方程式は，

$$m\frac{dv(t)}{dt}=-f(t)+k\{l-x(t)\} \tag{5}$$

だ．この式の両辺に $v(t)$ をかけて変形すると，

$$f(t)v(t)=-mv(t)\frac{dv(t)}{dt}+k\{l-x(t)\}v(t)$$

$$=\frac{d}{dt}\Bigl\{-\frac{m}{2}(v(t))^2+klx(t)-\frac{k}{2}(x(t))^2\Bigr\} \tag{6}$$

という形にできる（移項して積の微分の公式を使っただけなので，高校数学の範囲）．仕事の表式 (4) での被積分関数 $f(t)v(t)$ は，ある量の時間微分になっているということだ．そうとわかれば，（「微分して積分すれば元に戻る」という規則を使って）(4) の積分を直ちに，

$$W=\Bigl[-\frac{m}{2}(v(t))^2+klx(t)-\frac{k}{2}(x(t))^2\Bigr]_0^T \tag{7}$$

のように計算できる．$x(t)$ や $f(t)$ の具体的な形を知らなくても積分ができてしまった！ ここに $v(0)=v(T)=0$, $x(0)=l_1$, $x(T)=l_2$ を代入して整理すると，見事に (3) と同じ結果が得られる（やってみよう）．

■　2. 気体の自由エネルギー　■

気体を使って上と似た状況を考える．外から動かせるピストンのついたシリンダーがあり，中には n モルの理想気体が入っている．シリンダーは一定の温度 T に保たれた熱源と接触している．また，簡単のため，（実現するのは面倒だろうが）この装置の外は真空だとしておこう．

図 2 のように，気体の体積が V_1 の状況から出発し，外からピストンをゆっくりと動かし，体積を V_2 まで増やす．操作の途中，気体の温度は常に T だったとする．前節と同様，手がシリンダー

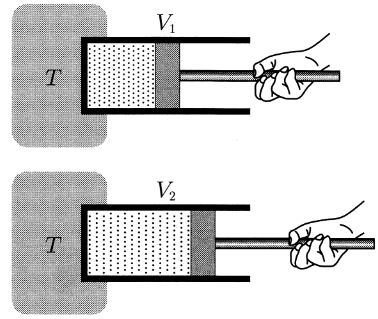


図 2　温度一定の熱源に接した気体の体積を V_1 から V_2 まで変化させる．取り出される仕事は操作の仕方に応じて様々な値を取るが，不等式 (15)（熱力学第二法則）を満たす．

からされる仕事の総量を求めたい．

体積が V のときの気体の圧力を $p(V)$ と書く．具体的には $p(V) = nRT/V$ だ（R は気体定数）．

まず，体積が V から $V + \Delta V$ になる間に手がされる仕事を求める．ピストンの断面積を A とすると，ピストンの移動距離は $\Delta V/A$ である．また，ピストンが手を押す力は（「圧力 = 力/面積」なので，）$p(V)A$ に等しい．よって，仕事（= 力 × 距離）は $p(V)A \times \Delta V/A = p(V)\Delta V$ となる．

これを V が V_1 から V_2 まで変化する間ずっと足し上げたのが，手がされる仕事だ．これも次のように積分で表わされ，

$$W = \int_{V_1}^{V_2} p(V)\,dV = nRT \int_{V_1}^{V_2} \frac{1}{V}\,dV = nRT\{\log V_2 - \log V_1\} \tag{8}$$

と具体的に計算できる．

「理想気体の**自由エネルギー**」と呼ばれる関数を

$$F(V) = -nRT \log\left(\frac{T^{3/2}V}{n}\right) \tag{9}$$

と定めると[*1]，(8) は，バネについての (3) と同様，

$$W = F(V_1) - F(V_2) \tag{10}$$

と書ける．ここまでは，バネの話と同じだ．

■ 3. ほどほどに速い操作 ■

さて，シリンダーは温度 T の熱源と接触しているわけだが，熱源と気体の間の熱の伝わり方はそれほど能率的ではないとしよう．それでも，ピストンを極めてゆっくりと動かす限りは，気体の温度は常に T に保たれるので，上で計算した結果は正しい．

ピストンをほどほどの速さで動かし，熱源との熱のやりとりが追いつかない場合を扱ってみよう．話を簡単にするため，ピストンを動かして体積を V_1 から V_2 に変化させている間の熱の移動は実質的に無視できて，断熱準静操作が実現されるとする．この場合には，ピストンを動かす操作によって気体の温度が（一時的に）低下する．ただ，体積を変化させた後しばらく放置すれば，熱が流れて，気体の温度は最終的には T に落ち着く．

さて，断熱準静操作では理想気体の体積 V と圧力 p がポアソンの関係式 $pV^{5/3} = (\text{定数})$ を満たすことが知られている．ここで，「定数」は初期状態で決まる．今の場合は，最初の圧力は $p_1 = nRT/V_1$ なので，定数は $nRT(V_1)^{2/3}$ である．よって体積変化の途中，体積が V のときの圧力 $\tilde{p}(V)$ は，$\tilde{p}(V)\,V^{5/3} = (\text{定数})$ を解いて，

$$\tilde{p}(V) = nRT(V_1)^{2/3}V^{-5/3} \tag{11}$$

となる．これを使い，(8) の場合と同様に，手がされる仕事の総量を求めると，

$$W_{\text{速}} = \int_{V_1}^{V_2} \tilde{p}(V)\,dV = nRT(V_1)^{2/3}\int_{V_1}^{V_2} V^{-5/3}\,dV = \frac{3}{2}nRT\left\{1 - \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{2/3}\right\} \tag{12}$$

となる．さて，これを (8) と見比べると，どう変形しても一致しない．

バネの場合とは話が違う！ バネを伸ばしたときは，最初と最後の状態が同じでありさえすれば，途中の操作が素早かろうがゆっくりだろうが，取り出される仕事の総量はいつでも同じ $U(l_1) - U(l_2)$ だった．ところが，**気体の入ったシリンダーのピストンを動かすときには，ゆっくり動かしたときの仕事 (8) と速めに動かしたときの仕事 (12) は明らかに異なるのだ．**

■ 4. 熱力学第二法則 ■

今度は数学の入試問題のようだが，$x > 0$ について，

$$\log x \geq \frac{3}{2}(1 - x^{-2/3}) \tag{13}$$

という不等式が成り立つ．$x = 1$ では等号が成立するが，それ以外では左辺のほうが真に大きい[*2]．

*1) 自由エネルギーは T, V, n の関数なので $F(T, V, n)$ と書くべきだが，今は T と n は一定なので省略した．また，ログの中の $T^{3/2}$ と n がなくても (10) は成り立つのだが，（ここでは取り上げない）自由エネルギーの性質を満たすためにはこれらも必要なのである．

*2) (13) を示すには，例えば，$x = 1$ で両辺が等しいことに注意して，両辺の微分の大小関係を比較すればいい．

$x = V_2/V_1$ として，この不等式を使うと，(8) の W と (12) の $W_{速}$ の間に $W \geq W_{速}$（$V_1 \neq V_2$ なら $W > W_{速}$）という大小関係があることがわかる．仕事 W を自由エネルギーの差で表わした (10) を思い出せば，この不等式は，

$$W_{速} \leq F(V_1) - F(V_2) \qquad (14)$$

とも書ける．

不等式 (14) は，はるかに一般的かつ普遍的な不等式の特別な場合なのである．図 2 のように，温度 T の熱源と接触した気体の体積を V_1 から V_2 に変化させる，一般の操作を考えよう．ピストンはゆっくり動かす必要もないし，体積を増やす方向にだけ動かすといった制約もない．例えば，素早く体積を縮めてから，ゆっくりと体積を増やし，それから，ピストンをガシガシと引いたり押したりする，などといった乱暴なことをしても構わない．最初の体積が V_1 で最終的な体積が V_2 という条件を満たすなら何をしてもいいとする．

このような一般的な操作の間に手がされる仕事，つまり，取り出される仕事を，$W_{一般}$ としよう．既に (8) と (12) という具体例で見たように，$W_{一般}$ は（バネの問題の場合のように）一定ではなく，操作の仕方に応じて異なった値をとる．しかし，ここにも規則性があり，どのような操作をした場合にも，外に取り出される仕事は

$$W_{一般} \leq F(V_1) - F(V_2) \qquad (15)$$

という不等式を満たすのである．これは，**熱力学第二法則**と呼ばれる重要な（しかし，高校物理では全く扱われない）物理学の基本法則の一つの表わし方である*3)．

1 節で見たように，バネを伸ばす問題では，最初と最後の状態が決まっていれば，外に取り出される仕事 W は，途中の道筋によらず，(3) のようにポテンシャルエネルギーの差で表現できた．**気体の場合は，仕事は道筋によって変わり，等式ではなく不等式 (15) を満たす**というのだ．

*3)　詳しくは，例えば，田崎晴明『熱力学：現代的な視点から』（培風館）を参照．

道筋に応じて仕事が変わること自体はそれほど不思議ではない．バネの系では，物理的な自由度は質点の位置と速度だけで，我々は，その両方を初期状態と終状態でしっかりと指定した．そのため，エネルギー保存則によって (3) の関係が出てきたのだ．一方，気体の系は膨大な自由度をもっている．もちろん，ピストンの位置も自由度ではあるが，それ以外に，無数の気体分子の位置と速度が変化するし，さらに，シリンダーに接触している熱源を構成している無数の分子の位置と速度も変化する．我々は，それら膨大な自由度のうちのたった一つであるピストンの位置を制御しているのだ．すべての自由度を制御していたバネの状況とは全く違うわけだから，仕事が一定にならないのはむしろ当たり前と言ってもいい．

そう考えると，気体の場合の仕事には一切の規則性がなく，あらゆる値が見出されてもおかしくない気がしてくる．なにしろ，10 の何十乗という膨大な自由度が好き勝手に動き回るのだから，何か突拍子もないことが起きることだってあるだろう．ところが，不等式 (15) は，取り出される仕事には明確な上限があると主張しているのだ．しかも，(8) で見たように，ピストンをゆっくりと動かすときには，仕事はちょうどこの上限と一致する！ 膨大な自由度が制御されずに好き勝手に振る舞っているはずなのに，ここには驚くべき規則性があるのだ．

■　5. 熱力学第二法則の神髄　■

特に $V_1 = V_2$ となる操作に注目すると，この「驚くべき規則性」の本質が見えてくる．体積が変化しないわけだが，かならずしも「何もしない」というわけではない．ピストンを引っ張ったり押したり，さんざん好きなように動かし，最後は一番最初と同じ位置に戻せということだ．このような一般の操作で外に取り出される仕事を $W_{戻る}$ とすると，不等式 (15) で $V_1 = V_2$ とした，

$$W_{戻る} \leq 0 \qquad (16)$$

が成り立つ.「取り出される仕事が負またはゼロ」なのだから，どうやっても，こちらから仕事をすることはあっても，気体や熱源から仕事を取り出すことはできないというわけだ．同じことを,「ピストンを動かし，最後はもとの位置に戻す」ような操作によって，気体 + 熱源のエネルギーを上げることはできても，下げることは決してできないと言い換えてもいい*4).

つまり，ピストンの操作によるエネルギーの移動には，定まった「向き」があるのだ．**熱力学第二法則は，そのような「エネルギーの流れの必然的な方向性」を厳密に定式化する極めてユニークな物理学の基本法則**なのである．

■ 6. 量子力学から熱力学第二法則へ？ ■

さて，ここまでは，熱力学第二法則についての，それなりに堅実で初等的な解説だったと願う．ここで一気に無茶な話に移ろう．これまで説明してきた現象を，原子・分子を記述する基礎理論である量子力学に基づいて理解できるかということを問いたい．

しかし，本題に入る前に，こういう問いを問うことそのものについて説明が必要だろう．

物理学の理論というのは，もちろん，神様が直接に教えてくれたものでもないし，偉い人たちが集まって勝手に決めたものでもない．過去の科学者が膨大な実験の結果，我々の世界に潜んでいる法則を見出して，それを体系化したのが物理学の理論だ．ただ，少し面白い（そして，ひょっとすると意外な）ことに，我々の世界は一つしかないにも関わらず，物理学にはいくつもの理論体系がある．大学での物理学のカリキュラムを見ると，熱力学，力学，電磁気学，量子力学といった様々な「科目」が並んでいて，これらそれぞれが物理学の体系に対応しているのだ．

複数の体系があるのは，人類が世界の法則を見出すときには，世界全体を相手にするのではなく，世界の限定された側面に深く着目するからだ．例えば，天体の運行・物体の運動を深く分析してそれらを統一的に理解した結果，力学の体系が得られた．同様に，電気と磁気に関わる諸現象に着目することで電磁気学が得られ，原子・分子の振舞いを究めることで量子力学が得られた．さらに，マクロな系のエネルギーのやりとりについての観察と洞察から生まれたのが熱力学だ．これらは，それぞれが普遍的に様々な状況に適応できる，独立した物理学の体系なのだ．

もちろん「世界は一つ」だから，これら独立した体系の間にも密接な関係がある．例えば，扱う対象が大きくなる極限で，量子力学は自然に（ニュートン）力学に移項する．また，ほとんどすべての物理学の体系には共通するエネルギーの概念があり，エネルギーを介して異なった理論体系どうしを定量的に関連づけることもできる．

ただし，今日でも，すべての体系どうしが完全に結びつけられているわけではない．特に，熱力学は大きなスケールでの熱や仕事のやりとりを扱う体系で，粒子や場の運動方程式を扱う力学や電磁気学とはかなり趣が異なっている．特に，物質の構成要素の振舞いを支配している（はずの）量子力学と，物質の大きなスケールでの振舞いを支配している熱力学の関係を理解することは，現代物理学の未解決の重要な課題の一つなのである．

長い前置きが終わったので，何を考えたいのかを説明しよう．量子力学を知らない読者にも雰囲気は伝わるように書くつもりなので,「話半分」に読んでいただければと思う．

図 2 の状況を量子力学で扱う．その際,「シリンダー内部の気体と熱源を合わせたもの」を一つの量子系とみなす．これは，すさまじく自由度の大きい量子力学の問題になるが，気にせず話を進めよう．現実には，シリンダーや熱源の周囲にもややこしい外界が広がっているわけだが，さすがにそれも取り入れると話が難しくなりすぎるので，さしあたっては，シリンダーや熱源のまわりには何もないと仮定してしまう．

---

*4) これまでは，話を簡単にするため，一つのピストンを動かすことだけを考えてきたが,（熱力学によれば）同じ結論が系への一般的な操作について成り立つ．

はじめ，この量子系（つまり，気体＋熱源）は初期状態 $|\varphi_{初}\rangle$ にあった*5)．図 2 に登場する「手」は，ある決まったやり方で，ピストンを動かし，最後はまた元の位置に戻す．このような「手」の動き（あるいは，気体の系へのより一般の操作）を一つ決めると，初期時刻から最終の時刻までの間に，系の状態がどう変化するかを決めるユニタリー変換 $\hat{U}$ というものが定まる．そして，初期状態にユニタリー変換を作用させた $\hat{U}|\varphi_{初}\rangle$ が系の最終的な状態 $|\varphi_{終}\rangle$ になる．

我々は，初期状態 $|\varphi_{初}\rangle$ として全エネルギーが E_0 程度のものを選ぶ（E_0 は系が取り得る最低のエネルギーよりはずっと高いとする）．そして，終状態 $|\varphi_{終}\rangle$ のエネルギーがどうなるかを考えたい．熱力学第二法則によれば，終状態のエネルギーは必ず E_0 よりも高いはずなのだ．

まず，量子力学の基本的な規則からわかる次の事実を述べておこう．

事実：エネルギーがほぼ E_0 であるような任意の初期状態 $|\varphi_{初}\rangle$ に対して，ユニタリー変換 $\hat{U}$ があり*6)，$|\varphi_{終}\rangle = \hat{U}|\varphi_{初}\rangle$ のエネルギーは E_0 よりもずっと低くできる．

エネルギーは下がってしまうのだ．量子力学を信じる限り，熱力学第二法則はあっさりと破れてしまうのか*7)？ 熱力学第二法則が正しいことは膨大な経験が示しているし，一方，量子力学も極めて信頼性の高い基礎理論である．これら二つが相容れないとしたら，それは物理学の重大な欠陥*8)になってしまう！ 真剣に考えよう．

上の「事実」では初期状態 $|\varphi_{初}\rangle$ に対してユニタリー変換 $\hat{U}$ が存在すると言っているだけで，これが「ありふれている」とは言っていないことに注意しよう．たとえ第二法則を破るような $|\varphi_{初}\rangle$ と $\hat{U}$ の組合せがあるとしても，それがものすごく珍しく実際問題としてこの世界で実現できないなら，第二法則は守られることになる．

実際，ユニタリー変換 $\hat{U}$ を（つまり，「手の動かし方」を）一つ固定したとき，以下が言える．

定理：エネルギーがほぼ E_0 であるような初期状態 $|\varphi_{初}\rangle$ の「ほとんどすべて」について，終状態 $|\varphi_{終}\rangle = \hat{U}|\varphi_{初}\rangle$ のエネルギーは E_0 より大きい．

虚心坦懐に初期状態を選んでくれれば，定理でいう「ほとんどすべて」の範囲に含まれると期待される．それを認めれば，この定理によって，熱力学第二法則が（量子力学の命題として）確立されたと考えることができる．

しかし，これで満足してしまっていいのか，私自身は悩んでいる．マクロな系の初期状態を「虚心坦懐に選んでくる」というのは厳密にはどういう意味なのだろうか？ そのときに「ほとんどすべて」に属する状態を選ぶ保証があるのだろうか？ また，上の設定とは逆に，初期状態は明示的に固定した上で，（ほとんどそっくりな）操作（つまり，ユニタリー変換 $\hat{U}$）の集まりを考え，「ほとんどすべての操作」について第二法則の成立を示すこともできる．「ほとんどすべての初期状態」についての命題と，「ほとんどすべての操作」についての命題はどちらがより「物理的」なのだろう？

こういった疑問は，まっとうな理論物理学の範囲にぎりぎり入るか入らないかの「危ない」問題設定だと思う．それでも，意味のある数学的な事実を積み上げていくことで，少しでもミクロ物理とマクロ物理の関連の本質に近づければと願いながら，私は日々頭を悩ませている*9)．

（たざき・はるあき，学習院大学理学部）

*5) 古典力学なら，系を構成するすべての分子の位置と速度を決めるのが状態を指定することだった．量子力学での状態の指定の仕方は，それとは全く違うのだが，ともかく指定する方法があるのだと思っていただければ十分．

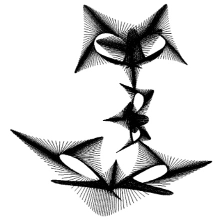
*6) そのユニタリー変換を実現するような気体の系への操作があり得るかはずっと難しい問題で，それについては現状の理論では目をつぶっている．

*7) これは，量子力学を虚心坦懐に使うと，マクロな世界での現象と矛盾しているように見える数多くの例の一つである．他の有名な例は「我々には時間が『過去から未来に』一方向に向かっていると感じられるが，量子力学の基本法則には特定の時間の向きはない」という「時間の矢」の問題．

*8) ここは，最初は「重大な危機」と書いていたのだが，熱力学や量子力学を実用的な目的のために応用するという立場からは，なんら「危機」ではないことに気づいて，書き直した．

*9) S. Goldstein, T. Hara, H. Tasaki による詳細な論文を準備中．

生物とエネルギーの流れ



伏見　譲

1. エネルギー保存則の起点

エネルギー保存則，すなわち熱力学第一法則が生命現象の観察から発想されたことは有名な史実である．オランダ領東インド（インドネシア）に向かう船の船医だったドイツ人医師マイヤーは，熱帯気候の下では，船員患者の静脈血が動脈血と同じような鮮やかな赤色をしていることに気づいた．熱帯では身体の熱損失が少ないので，酸素消費が少なくてすむからではないか．19世紀ドイツ教養人はカント哲学の影響下にあり，マイヤーも自分の発見した事実を深く考え，一般化していき，ついにエネルギー保存則に到達し，熱の仕事当量を（気体の定圧比熱と定容比熱の差が気体定数に等しいというマイヤーの式を用いて）理論的に決定したのである（1842年および1845年）．少し遅れてドイツ本国でもヘルムホルツがポツダムの連隊で軍医として働いていたとき，筋肉仕事と酸素消費の均衡に注目していた．マイヤーと同様の一般化に進み，ジュールによる熱の仕事当量の実験結果（1847年）を取り入れ，同年にエネルギー保存則にまとめ上げることに成功した．ヘルムホルツはドイツ諸大学の生理学教授を歴任した後，1871年にベルリン大学物理学教授に就任する．ベルリンでは，**自由エネルギー**の概念を発案してエントロピー増大則を使いやすい形にし，例えば，生体反応を含む化学反応の方向性の判別式を導いた．19世紀前半は，動力源としての馬（生命力）と水車（重力）と蒸気機関（熱力）の共存時代であった．生理学研究からエネルギー（仕事をする能力）の「質的な変換」とその「量的な保存」が発見される素地は十分あったのである．本稿では，エネルギー保存則の起点にあった「生命力」の意味するところを現在の知見に基づいて概観してみたい．生物のほとんどすべては生体高分子の進化の産物であることを認識してもらうために，進化論的に概観する．

2. 生命現象における相補性原理とエネルギーの流れ

筆者は前稿[1]で，生命現象における相補性原理というべきものを紹介した．分子生物学が明らかにしたDNA支配の機械論的生命観と，プリゴジンの散逸構造に代表される生成論的生命観との相補性である．

ゲノムDNA情報の存在を認めれば，生命は秩序から秩序が生ずるものとして納得できる．生体の秩序形成において，ゲノムDNA情報の設計図としての支配は圧倒的であり，物理・化学の秩序形成原理は副次的なものに後退しているように見える．妊婦は産まれてくる赤ん坊がブタかも知れないと心配することはないし，ヒトの皮膚からのiPS細胞がカエルの網膜になるかも知れないと心配する医師もいない．しかし，そのゲノムDNA情報はいかにして生じたのかという質問にこの機械論的生命観は答えることができない．

すなわち，無秩序から秩序が生成する原理が要請されることになる．これに応えたのが，平衡から遠く離れた非平衡開放系に特殊な反応系があれば，ゆらぎの増幅という非線形効果で，エネルギーの散逸（エントロピー増大）を伴いながら，動的秩序が形成されることがある，という**散逸構造論**である．

地球は，昼間太陽光線が照射され，夜間宇宙空間に赤外線を放射するというエネルギーの流れの中にある．地球内部マグマを熱源とするエネルギーの流れもある．地球環境は熱平衡から遠く離れた非平衡開放系である．これらのエネルギーの流れによって，原始地球の海には有機物が蓄積していったと考えられている．これを

「原始のスープ」という．コンソメ程度からポタージュ程度まで，色々主張されている．特に，海底火山の周辺の熱・化学エネルギー流が地球生命の起源の場所ではないかという説が有力である．

3.「弱電」から「重電」へ：複製から代謝へ

最初の生命体であると考えられている原始海水中のRNAが生きていくためのエネルギー流について考えてみよう．RNAは4種のヌクレオチド（pN（N=A, U, G, C，pはリン酸基を表す）と略記）の重合体であるが，水中では，触媒（例えばアルカリ）があれば容易に加水分解する．すなわち，RNA分子は，そしてまたその分子上に書かれているゲノム情報は，安定ではなく，準安定状態にあり，時間が経てば確実に崩壊する．そこで，生き延びてきたゲノムRNA情報のとった生存戦略は，崩壊する前にコピーしておくこと，を繰り返すことであった．しかし，コピー体RNAも準安定状態にあるから，このRNA合成反応を進めるためには，重合体を構成する単量体を用意してもダメである．言い換えると，ヘルムホルツ–ギブズの化学熱力学の用語では，自由エネルギー変化 ΔG が重合方向で正，すなわち吸エルゴン反応である：

$$\cdots \mathrm{NpN} + \mathrm{pN} \leftrightarrows \cdots \mathrm{NpNpN} + \mathrm{H_2O} \quad (\Delta G > 0).$$

ゆえに，化学平衡は圧倒的に分解側の左辺に偏っていることになる．そこで，現在の生細胞中の生化学では，活性化単量体（ヌクレオシド三リン酸塩，pppN）を用意して，両辺のエネルギー上下関係を逆にし，発エルゴン反応にする：

$$\cdots \mathrm{NpN} + \mathrm{pppN} \leftrightarrows \cdots \mathrm{NpNpN} + \mathrm{pp} + \mathrm{H_2O}$$
$$(\Delta G^{o'} = -32\,\mathrm{kJmol^{-1}} < 0).$$

ここで，上付きの o' は，生物学的標準状態での値であることを示す．この場合は，反応は自発的に重合側に進む．ここで，ppはピロリン酸塩を表すが，ppは酵素によって直ちに加水分解（$\Delta G^{o'} = -34\,\mathrm{kJmol^{-1}}$）するため上の反応は右向きに一方通行となる（一般に生体反応における合成と分解は互いに逆反応ではない．可逆反応だけから構成されたら，システム全体が化学平衡近辺であることを意味し，散逸構造を構築できない）．

原始の活性化単量体もpppNであったと仮定しよう．そうすると，10^{-19} J/bit程度のエネルギー流で，原始遺伝情報のコピーは進行する．するとまた，流れの中では，必然的に，塩基配列をデジタル情報記録として分子進化が進行し始める[1]．

N=A（アデニン塩基）の場合のpppAを**ATP**（**アデノシン三リン酸（塩）**）と言う．アデニンの構造式を見ると青酸HCNが5個埋め込まれているのがすぐわかる．4種の塩基A, U, G, Cの中でAは原始地球条件で最も容易に合成されたと考えられる．

最初，遺伝情報の伝達・記憶（情報処理・通信用エネルギーなので仮に生体の「弱電」と呼ぼう）を発エルゴン性にするために使われたATP分子だが，生体中の他の準安定分子の合成のためにも使われるようになった．すなわち，次の**発エルゴン反応と共役**させれば，$+30\,\mathrm{kJmol^{-1}}$ 未満の $\Delta G^{o'}$ をもつ吸エルゴン反応を駆動して準安定分子を合成できる：

$$\mathrm{pppA} + \mathrm{H_2O} \rightarrow \mathrm{ppA} + \mathrm{p}$$

（$\Delta G^{o'} = -30\,\mathrm{kJmol^{-1}}$（37℃，生物学的標準状態で），なお，$\Delta H^{o'} = -20\,\mathrm{kJmol^{-1}}$，$\Delta S^{o'} = +0.04\,\mathrm{kJK^{-1}mol^{-1}}$，生理的条件では $\Delta G = -50\,\mathrm{kJmol^{-1}}$ 程度）．

ppAをADP（アデノシン二リン酸（塩））と言う．大事なことは，平衡論的には自発反応だが，遷移エネルギーが高いため，速度論的には生化学の時間スケールでは反応は進まず，この反応を進めるには触媒（酵素）が必要だということである．その同じ酵素が別の吸エルゴン反応をも触媒するとしたらエネルギーの引き渡しができる機構さえ作れればよいことになる．すなわち，酵素がこの共役反応の場を提供できる（図1）．なお，上記反応式の自由エネルギー等の値の由来に関しては，水和の効果が大きいことがわかっている．ATP分子の量子力学計算だけでは出てこない値である．

面白いことに，地球上の生物はすべて，ATPを**エネルギー通貨**に使っている．核酸合成や蛋白質合成はもとより，細胞分裂の動きにも，筋肉を動かすにも，神経パルスを出すのにもATPのエネルギーを使う．すなわち，現代生活における電力のような地位を占めている．ATPは流通用であって，エネルギー保存用ではないことも電力に似ている．放射能トレーサー実験によればATPの生体内半減期は数秒から数分である．ヒト成人は安静時でも1時間に1.5 kgのATPを消費・再生する．運動しているときは消費・再生量が一桁以上増す．これはもはや「重電」である．原始の「弱電」の場合は，ATPは原始のスープから採取すればよかったが，今や「発電所」の建設が必要となる．小規模発

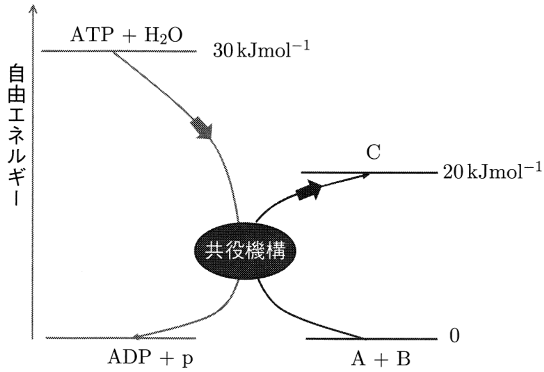


図1　エネルギー通貨 ATP との共役反応：右側の反応だけに注目すると，本来起こり得ないことが起こったように見える．生気論的生命力がこれを起こすと考える人もいた．1941 年，左側の反応が共役していることがリップマンによって明らかにされた．20 世紀後半の X 線結晶解析の結果，酵素蛋白質の立体構造変化を介して共役する場合が多いことがわかっている．

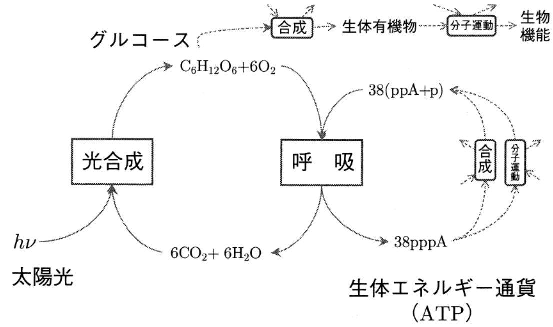


図2　地球生態圏のエネルギー流：生物を介してのエネルギー変換と物質循環．各過程で熱エネルギーも放出される．

電（発酵）と大規模発電（呼吸）がある．

原始のスープが残っている間は，人間社会での化石燃料のごとく，糖のような大量のエネルギーが取り出せる有機物資源を採取し酸化してエネルギーを獲得する「化石燃料発電所」だけでよかったが，原始のスープが残り少なくなると，生命世界は自ら，化学エネルギー源を作り出す必要に迫られた．人間社会の再生可能エネルギー開発の必要性と同じである．このための技術開発は，地球上生物進化では，最初に化学合成法，次いで無酸素光合成法，最終的に酸素光合成法と発展していったと考えられる．

生体を非平衡の秩序状態に維持するために，絶えず自由エネルギーを取り入れ利用する全過程のことを，生物学用語で**代謝**と言う．そのうち，「発電所」操業や，「再生可能エネルギー生産工場」操業を**エネルギー代謝**と言う．

成人には 60 兆個の細胞があるが，その各々で代謝が行われている．某大手ガス会社が各家庭で都市ガスを用いた燃料電池で発電することを薦めているが，生体エネルギーシステムはこれに似ている．体内に張りめぐらされているのは燃料用配管（血管）であり，送電線ではない．

4.「重電」の現状：エネルギー代謝

マクロレベル

現在の地球表層の生態圏の中を覗いてみると，2 節で述べたエネルギーの流れは物質の循環過程（化学エネルギーの変換）と共役している．糖（**グルコース**，$C_6H_{12}O_6$）を燃焼し，二酸化炭素と水に変えるという「**呼吸**」過程と，二酸化炭素と水から，太陽光を用いて糖を合成するという「**光合成**」過程の循環である（図 2）．糖を化学反応として燃やしたときは，1 段反応で燃焼熱が出るだけだが，生化学反応として燃やす場合は，多段階反応で，38 分子の ATP が合成され，エネルギー通貨の化学エネルギーに 67% の高効率で変換される．

「呼吸」を大腸菌の培養で説明しよう．生元素を含む塩 5 種とグルコースの水溶液（最小合成培地）を 37°C にして空気をぶくぶく通すと，大腸菌は世代時間 50 分で増殖できる．グルコースが唯一のエネルギー源であり，炭素源である．大腸菌ゲノムに設計図が書かれたマシンシステムを用いれば，この分子だけを材料にして，大腸菌細胞を構成するすべての有機物分子を合成し生細胞に組織化できるわけである．その時必要になるエネルギーをグルコースの O_2 による酸化（呼吸）に共役して合成した ATP でまかなう．糖（グルコース）は有機物であり，他の生物が合成したものを払い下げしてもらわねばならない．よって，大腸菌は従属栄養生物であり，独立して生きることはできない．

一方，「光合成」を行うシアノバクテリア（藍藻）は独立栄養生物である．生元素を含む無機塩類の水溶液に光を照射し二酸化炭素をぶくぶくやれば，光エネルギーですべての有機物を合成し増殖する（図 2）．そのとき，酸素ガスを排泄する．大腸菌の場合必須栄養であった糖をも，自前で合成するのである．地球生態圏のマクロなエネルギーの流れは独立栄養生物を出発点とする食物連鎖に沿って流れる．食物連鎖は，従属栄養生物の末端に位置する腐生栄養者よる有機物の無機

栄養塩への変換を経て独立栄養生物に戻る循環過程である．

大腸菌は O_2 がなくても生きていける．呼吸ではなく**発酵**によって，糖を不完全に酸化し乳酸にする過程で ATP を合成する．この発酵では，グルコース 1 分子から，ATP はわずか 2 分子しかできず，変換効率は 31% 程度である．実はヒト筋肉中でも応急的に ATP が必要なときは，この方法で合成される．呼吸よりも合成速度が 100 倍も速いからである．

シアノバクテリアは CO_2 と H_2O を原料とし，酸素ガスを排泄する光合成を行うが，これは高等植物の**葉緑体**も同じである．この酸素光合成法がすばらしいのは，資源が遍在しており，至る所で繁茂できる点である．しかし，CO_2 と H_2S を原料とし，硫黄を排泄する（従って酸素ガスを排泄しない）という原始的光合成を行うバクテリアもいる．光合成という高級な機構が進化してくるまでは，無機塩の還元力を利用した化学合成によって有機物を合成する独立栄養生物が，特定の場所で栄えていたと考えられる．

植物は光合成で年間 10^{21} J 以上の化学エネルギーを地球上に蓄積すると見積もられている．動物の ATP の「重電」的使用分野は，成長，体温維持，運動などである．かくして，ヒト成人が静かに座っているときのエネルギー流は 120 W であり，激しく運動しているときはその 10 倍に達する．ちなみに，1 馬力とは，735.5 W である．

細胞レベル

現在の生物の体内エネルギー流を細胞レベルで調べると，巧妙なエネルギー変換を逐次行うシステム（エネルギー代謝系）が見えてくる．そもそも細胞とは何だろうか．進化能の観点から考えると，それは遺伝子型・表現型対応付けのためのコンパートメントである．多種の突然変異体があるとして，ある突然変異蛋白質分子が優秀だった場合，その突然変異遺伝子の選択的増幅にフィードバックできれば進化が進むわけだが，蛋白質（表現型）とその遺伝子 DNA（遺伝子型）が同じコンパートメントに入っていれば，この遺伝的フィードバックが可能になる．閉じた細胞膜が出現したときの最大の役割はこのメカニズムによる進化能の向上であっただろう[1]．イオン溶液中で内と外を隔離する液体性障壁（細胞分裂するためには固体膜は効率が悪い）として脂質二重膜が採用されることになった．これは電気絶縁膜である．すると，細胞内外のイオン濃度が異なれば，**電気化学ポテンシャル**が膜間に発生し，電気エネルギーを細胞膜に蓄積できることになる．進化が進めば，これを利用しない手はないであろう．実際，1961 年ミッチェルは **ATP 合成**にこれが利用されているという仮説を提出した[2]（化学浸透圧説，1978 年ノーベル化学賞）．

「呼吸」におけるエネルギー変換は次のように進むことがわかっている[3]．グルコースのもつ大きな化学エネルギーが，「解糖系」という反応回路でピルビン酸になるとき，正味 2 分子の ATP と NADH（N'pA と書けるヌクレオチド二量体で酸化されやすい，すなわち電子を出しやすい分子）のが合成される．ピルビン酸はアセチル補酵素 A を経て，細胞内小器官である**ミトコンドリア**中で，「クエン酸サイクル」という環状反応回路に入り，NADH を出す．次いで，NADH が酸化されたときのエネルギーを利用して「酸化的リン酸化」という反応回路を駆動し ATP が 36 分子合成される．酸化的リン酸化の具体的内容は驚くべきものであった．すなわち，ミトコンドリアの膜蛋白質とキノンの酸化還元状態をリレーする（電子伝達）のに共役して**プロトンポンプ**が膜内外の水素イオン濃度差を作り出す．電気化学ポテンシャルにエネルギーが変換された．この**濃淡電池**がプロトン流によって放電するときのエネルギーを使って膜内に存在する**分子モーター**が回転し，力学エネルギーに変換する．この力学エネルギーにより ATP を合成し化学エネルギーに変換する．

一方，「光合成」におけるエネルギー変換は次のようである[3]．光で励起された分子の電子状態が，膜中に配置された色素の酸化還元状態の変化のスイッチを入れ，結果として電子が移動する．それに共役して，NADPH（リン酸化された NADH，生体還元力通貨）が合成されると同時に，プロトンポンプが動き，膜内外の水素イオン濃度差を生み出す．以下，ミトコンドリアの場合と同じように，プロトン流による分子回転モーターの力学エネルギーにより，ATP を合成し化学エネルギーに変換する．以上を光合成明反応という．次いで光合成暗反応では，明反応で作られた ATP と NADPH のエネルギーを用いて，二酸化炭素と水からグルコースが合成される（化学エネルギー）．グルコースは重合してエネルギー貯蔵庫のデンプンとなる（動物のエネルギー貯蔵庫は同じくグルコースが重合したグリコーゲン，および，脂肪や筋肉蛋白質）．

このように，生体エネルギーの中心に原始 RNA ワールドの痕跡のヌクレオチド類がたくさん残っている．また，呼吸過程と酸素光合成明反応過程は極めて類似

している．前者が後者の進化的起源だからではないだろうか．動植物細胞で「呼吸」の最終段階を行うミトコンドリアと，植物で酸素光合成を行う葉緑体は，共に独自の DNA を持っている．マーギュリスは，これらの進化的起源として**細胞内共生説**を唱えた[5]．すなわち，前者は酸化還元能力に優れた細菌，後者はシアノバクテリアの先祖でもある光合成細菌が真核細胞内に寄生しその後共生状態に移行したものと考えるのである．

分子機械レベル

呼吸と光合成に関わる膜蛋白質の立体構造が X 線結晶解析で解明されてきた．また，蛍光顕微鏡を駆使した蛋白質分子モーターの一分子操作・一分子観察が行われた．その結果，前節で述べた細胞レベルの反応を生み出す分子レベルのメカニズムがわかってきた．まず，「呼吸」の最終段階で働くミトコンドリアの膜貫通蛋白質シトクローム酸化酵素を見てみよう．これは**プロトンポンプ**で，シトクローム c を酸化して得られた電子を用いて，O_2 を水にまで還元する反応に共役して駆動される．絶縁膜中を電子とプロトンが移動する機構が銅イオンや鉄イオンを含む膜蛋白質の立体構造とその変化から推測できたのである[4]．光合成好塩菌の紫膜に存在するバクテリオロドプシンもプロトンポンプである[3]．この膜貫通蛋白質は 248 アミノ酸からなる 1 本のポリペプチドでできているが，α ヘリックス構造 7 本が膜を貫通するような立体構造をとっており，内部に色素レチナールを結合している．570 nm の光を吸収すると，レチナールは折れた形からまっすぐな形に構造変化する．これが蛋白質立体構造の 4 段階変化をトリガーし，カルボキシル基の誘電率環境を変化させることを通してプロトン解離・再結合のリレーが行われる．一方，シアノバクテリアや高等植物の酸素光合成反応中心のプロトンポンプは遙かに複雑である[3,4]．

次に，**F_0F_1-ATP 合成酵素**を見てみよう[3,4]．この酵素の F_0 部分は膜貫通蛋白質で，プロトン流駆動で回転する**分子モーター**である．細胞内部に突き出した F_1 部分は F_0 と同軸で回転する力学的 ATP 合成マシンである．偏心回転子が F_1 の $\alpha\cdot\beta$ サブユニット 3 量体が作るドーナツ状固定子の内側を押すように 1 回転すると，β サブユニット分子表面立体構造が，ADP+p が結合しやすい形，ATP が結合しやすい形，両者とも結合しにくい形と順次変化していくため，力学エネルギーにより ATP 3 分子が次々に合成される．この ATP 合成酵素は，呼吸最終段でも，光合成明反応で

も，プロトンポンプと同じ膜状にあり，H^+ 濃度差を介して両者は共役する．

固体電子回路では，現在，光と電子の共役によるデバイスが花盛りであるが，生体というコンパートメント化されたイオン溶液系回路では光，電子と共にプロトンや金属イオンが共役するデバイスが進化している．

5. 再び「弱電」へ：脳

閉じた絶縁膜を電気化学ポテンシャル生成の場にし，それを生命現象駆動のエネルギーとする場合，利用する荷電粒子は H^+ に限るものではない．実際，神経信号発生と伝達には Na^+ と K^+ が利用されている（Ca^{2+} も）．Na^+/K^+ ポンプと Na^+ と K^+ の**イオンチャネル**という膜貫通蛋白質がそのためのデバイスである[3]．Na^+/K^+ ポンプは ATP 1 分子のエネルギーを使って，細胞から $3Na^+$ を出し $2K^+$ を入れる．細胞内部の通常のイオン濃度は $(Na^+, K^+) = (12\,\mathrm{mM}, 139\,\mathrm{mM})$ に対し，外部は $= (145\,\mathrm{mM}, 4\,\mathrm{mM})$ になる．各イオンチャネルは電位やリガンド結合などをセンスしてゲートが一時的に開くようになっている．Na^+ と K^+ の電位依存イオンチャネルの電位閾値が違うので開閉のタイミングがずれ，神経電気パルスを伝達することができる．

ヒト成人の脳の重量は体重の 2% であるが，酸素消費量は寝ているときでも 20% を占めるほど高い．しかも思索の強弱とはあまり関係がないそうである．これは神経信号伝達に必要な膜電気化学ポテンシャルを維持するために Na^+/K^+ ポンプを常に働かせていなければならないからだそうだ．従って脳細胞の ATP の半減期は数秒である．脳の燃料は基本的にグルコースであり，脳のグリコーゲン貯蔵量は少ないので，適切な血糖濃度の維持と，血流による燃料と O_2 との脳への供給は，ヒトにとって非常に重要である．脳もスパコンも弱電回路の集積であるが，あまりにも集積度が大きいので，動かすには大電力がいるわけである．脳とスパコンの大きな違いは，電源を切ったときに明らかになる．代謝経路の性質上，ATP を合成するためには，まず ATP を使う必要があるので，一度停止し ATP を使い切ってしまうと再起動できないのである．ちなみに，筋肉が疲れを感ずるのは，ATP を使い切ってしまわないための警報であるという．生体はまさに動的構造（散逸構造）であり，停止は死に直結する．

6. 進化におけるエネルギー類似量

生細胞という舞台と，生体高分子という役者が決まると，生命現象という劇が物理・化学の法則（自由エネルギー原理）に従って演じられる．演ずるにはエネルギーの流れの中にいることが必須であり，地球環境が基盤的なエネルギー流を提供してくれるとしても，有効利用できるエネルギー形態に変換して流すこと（代謝）も演目の中に入っている．

しかし，なぜ，この舞台でこれらの役者がこのように演ずることになっているのか．宇宙史的には，あるいは，物質科学と生命科学とを統合するには，この問に答える必要がある．生命の起源と進化の物理学が待たれるわけである．遺伝情報の起源とゲノム情報（遺伝情報のセット）の獲得過程の物理学と言い換えてもよい．

上述したように地球生態圏や生物個体は散逸構造と見なせるが，上述した相補性原理によれば，これに，DNA 支配の機械論的生命観を組み合わせなければ生命とは言えない．この組合せの一つの解答は，生命は二重の散逸構造である，すなわち，配列空間における散逸構造でもあるという考えである．**配列空間**とは DNA 塩基配列（4 文字文字列）の可能なすべてからなる離散空間で，例えば自然界大腸菌ゲノムの塩基配列集団は，この空間中で局在化している．この局在分布の形状を散逸構造と見なすのである．大腸菌が進化するとは，この局在領域が移動することに他ならない．さて，この移動の駆動エネルギーは何か．

自然界での進化は状況が複雑すぎるので，実験室内

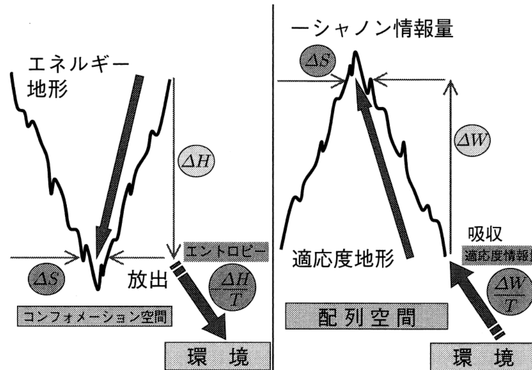


図 3　エネルギー地形と適応度地形：左は蛋白質のフォールディング過程，右は進化リアクター中の分子進化過程．

に単純化した分子進化系を作る研究（進化リアクターの設計と運転技術）が発展してきた[6]．力学史における真空中の落下実験に相当するかも知れない．この非線形非平衡実験系では，上記駆動「エネルギー」を「**適応度**（fitness）」という名称を持つ量で定義できる．進化リアクター中の分子進化とは，配列空間上の適応度の地形を登る運動に他ならない．しかも，シャノン情報量と組み合わせた，自由エネルギーに相当する**自由適応度**が進化の方向を決める．進化における環境からの適応度情報獲得過程と，発熱反応における環境へのエントロピーの放出との間にアナロジーがとれる（図3）[7]．

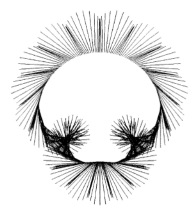
エネルギー保存則が生理現象の観察から発想されたように，エネルギー問題が生命にとっても重要問題であることは当然である．しかし逆に，それは生命らしさを代表する問題とは言えないだろう．「エネルギー」を介して，いかにして生命の情報問題や進化問題に接近するかが問われているのである．

参考文献

1) 伏見譲, DNAはなぜヒトを発明したか, 数理科学 2012年6月号，pp.60–65.
2) Mitchell, P, Coupling of Phosphorization to Electron and Hydrogen Transfer by Chemi-Osmotic Type of Mechanism, *Nature* **191**, 144–148 (1961).
3) ヴォート『生化学（上，下）第3版』（東京化学同人，2005）.
4) 垣谷俊昭，三室守編『電子と生命』（共立出版，2000）.
5) マーギュリス『共生生命体の30億年』（草思社，2000）.
6) 伏見譲監修『進化分子工学』（NTS，2013刊行予定）.
7) Aita, T & Husimi, Y, in Richter, H d Engelbrecht, A eds., “Recent Advances in the Theory and Application of Fitness Landscape” (Springer, in press).

（ふしみ・ゆずる，埼玉大学名誉教授）

相対性理論とエネルギー



白水 徹也

1. はじめに

Newton 力学では，系が時間に陽に依存しない場合，保存エネルギーを考えることができた．例えば，質量 m，速さ v，位置エネルギー $V(x)$ の質点のエネルギーは $E = mv^2/2 + V(x)$ であると学ぶ．x は粒子の位置座標．この E が質点の運動中に保存する．

特殊相対性理論においては時空が平坦であるため，時空に対称性が存在する．特に，時間の並進対称性に付随した保存するエネルギーを自然に考えることができる．そして，有名な Einstein の公式 $E = mc^2$ にたどり着く．ここで E はエネルギー，m は質量，c は光の速さである．このエネルギーは**静止エネルギー**と呼ばれ，粒子が静止している慣性系での粒子のエネルギーである．Einstein の登場によって，エネルギーの理解が大きく変更を受けることになったのである．

時空自身を扱う一般相対性理論になると話がややこしくなる．一般に時空の対称性は存在しないため，保存量の定義ができない．さらには**等価原理**のために重力を局所的に消すことができてしまうため，重力を含めたエネルギーの定義が難しくなる．一般に手出しのしようがないように見えるが，時空に時間依存性がないような時空*1)（定常時空）では，やはり保存エネルギーを考えることができる．興味深いことに，回転しているブラックホール時空（**Kerr 解**）の場合，回転による慣性系の引きずりの効果がブラックホール近傍で激しく生じる結果として，非常に面白い現象が予言される（3 節）．

また，時空そのもののエネルギーも興味の対象であろう．このとき等価原理が立ちはだかる．しかし，しばしば研究の対象となる孤立系に対応する時空，例えば天体周辺の時空を考えた場合に時空の全エネルギーを定義することができる．しかも，そのエネルギーは非負であり，ゼロのときに限り平坦時空（Minkowski 時空）になることがわかる（**時空の剛性**）．一般相対性理論は観測や実験からの様々なテストに現時点では合格している．純粋に理論的な観点からこのような性質は一般相対性理論が振舞いの良い理論であることを教えてくれる．

順番にみていこう．まずは特殊相対性理論におけるエネルギーから．

2. 特殊相対性理論とエネルギー

前出の $E = mc^2$．この式は電磁場を支配する Maxwell 方程式と力学の辻褄を合わせることで導かれた．

Maxwell 方程式は Lorentz 変換の下で不変であり，その変換の下で不変な微小間隔距離（世界線素）は

*1) 正確には，そのような時間座標 t がとれることが可能な場合．

$$ds^2 = -c^2dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 \qquad (1)$$

である．t は時間座標．この時空は Minkowski 時空と呼ばれる．この空間でのベクトルは 3 種類存在する．ベクトル ξ^μ に対して*2)，$\xi^\mu\xi_\mu = g_{\mu\nu}\xi^\mu\xi^\nu$ が負，ゼロ，正の値に応じて**時間的，光的，空間的ベクトル**と呼ばれる．ギリシア文字の添字 μ, ν などが重複している場合，時間座標のラベル 0 と空間座標のラベル 1, 2, 3 について和をとる約束をしている．光的ベクトルは光速で運動する粒子の軌道の接ベクトルに，時間的ベクトルは質量をもつ粒子の軌道の接ベクトルに対応している．光よりも速く運動できる粒子は存在しないので，空間的な方向への運動は自然界では禁じられている．

自由粒子（相互作用のない質点）を考えよう．質点に対する作用関数 S は，Lorentz 変換の下での不変性から

$$S = -mc^2 \int_{\tau_{\mathrm{initial}}}^{\tau_{\mathrm{final}}} d\tau \qquad (2)$$

と書ける．ここで τ は質点の固有時間で，$d\tau = c^{-1}(-ds^2)^{1/2}$ で定義される．但し，ここでの ds^2 は軌道に沿った世界線素である．例えば，$d\boldsymbol{x}/dt = \boldsymbol{v}$ で運動する粒子を考えたとすると $d\tau = \sqrt{1-\boldsymbol{v}^2/c^2}dt$ となる．Lorentz 因子が掛かっている分，静止している観測者の時間 t の進みと比べ固有時間 τ の進みは遅くなることがわかる．粒子の速さが光速と比べ十分遅い場合は $d\tau = \sqrt{1-\boldsymbol{v}^2/c^2}dt \simeq (1-\boldsymbol{v}^2/2c^2)dt$ と近似できるので，上の作用関数は $S \simeq \int(-mc^2 + m\boldsymbol{v}^2/2)dt$ となる．第一項は定数なので，運動方程式には影響を与えない*3)．第二項がちょうど自由に運動する質量 m の粒子のラグランジアンになっている．

さて，Newton 力学の質点の運動量 mdx^i/dt に対応する特殊相対性理論における量は

$$p^\mu = m\frac{dx^\mu(\tau)}{d\tau} \qquad (3)$$

である（4 元運動量）．ここで $x^\mu = x^\mu(\tau)$ は粒子の軌道であり，$x^0 = ct$ としている．非相対論極限（$\boldsymbol{v}^2/c^2 \ll 1$）において，確かに $p^i \simeq mdx^i/dt$ になっている．ここで添字 i は，ベクトルやテンソルの空間成分を表す．相対論的運動方程式は

$$\frac{dp^\mu}{d\tau} = f^\mu \qquad (4)$$

となるが，今は自由粒子を考えているので外力に対応する右辺の項はゼロである．運動方程式の i 成分は，運動量の保存を表している．そして，0 成分はエネルギーの保存則に対応している*4)．

$$\frac{d}{d\tau}\Big(\frac{mc^2}{\sqrt{1-\boldsymbol{v}^2/c^2}}\Big) = 0. \qquad (5)$$

従って，

$$E = p^0c = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\boldsymbol{v}^2/c^2}} \qquad (6)$$

が粒子のエネルギーとなっていることがわかる．粒子が静止している系では mc^2 となる．これが有名な Einstein の公式であり，mc^2 は静止エネルギーと呼ばれている．$|\boldsymbol{v}|/c \ll 1$ において，$E \simeq mc^2 + (1/2)m\boldsymbol{v}^2$ と，静止エネルギーと馴染みの運動エネルギーを足したものになっている．

粒子の速さが光速に近ければ近いほど，エネルギー E は大きくなる．運動方程式の観点からは，これは粒子の慣性が大きくなる，すなわち運動しにくくなることを意味する．ポンと粒子をたたいたときに粒子の速さが光速に近づけば近づくほど慣性が大きくなるため速さをアップすることが困難になる．その結果，粒子の速さは光速を超えることができないと考えることもできる．

3. 曲がった時空におけるエネルギー

曲がった時空においてもエネルギーの定義は観測者に依存する．ある観測者がある場所でエネルギーと思っていたものが，他の場所ではエネルギーではなくなっていることが生じる．この現象は回転するブラックホール近傍で起きると期待され，興味深い現象を引き起こす．まずは定義を明確に

*2) ギリシア文字を 4 次元のベクトルの成分を表す添字として採用している．

*3) 変分原理から方程式が導かれる．

*4) 導出の際に，元の式に c を一回掛けてエネルギーの次元を持たせ，$dt/d\tau$ を慣性系（$\{t, x, y, z\}$）での粒子の速度 $\boldsymbol{v}$ を用いて $d\tau/dt = \sqrt{1-\boldsymbol{v}^2/c^2}$ と書けることを用いている．

しなければならない．粒子の４元運動量を p^μ，観測者の４元速度ベクトルを v^μ と書くことにしよう．すると，この観測者が観測するエネルギーは $E = -g_{\mu\nu}p^\mu v^\nu$ で与えられる．

さて天体から離れたところでの時空は十分よい近似で平坦時空として記述されるであろう．つまり計量は

$$ds^2 \simeq -c^2dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 \qquad (7)$$

と近似的に与えられる．この座標系に対して自然な観測者の接ベクトルは $v^\mu = (c, 0, 0, 0) = (\partial_t)^\mu = c(\partial_{x^0})^\mu$．まず，簡単のために回転のない天体，特に **Schwarzschild ブラックホール時空**を考えてみよう．空間座標に関して極座標を採用したときに，その計量は*5)

$$ds^2 = -c^2f(r)dt^2 + f(r)^{-1}dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2). \qquad (8)$$

ここで $f(r) = 1 - 2GM/c^2r$．v^μ は遠方では当然時間的ベクトルとなっているが，重力場が強い領域では興味深い現象が起こる．これをみるために，v^μ の内積をとってみよう．

$$g_{\mu\nu}v^\mu v^\nu = -c^2f(r). \qquad (9)$$

この式から明らかなように，$r > 2GM/c^2$ では v^μ は時間的ベクトルであるものの，$r = 2GM/c^2$ では光的ベクトルに，そして $r < 2GM/c^2$ では空間的ベクトルとなってしまう．$r = 2GM/c^2$ は **Schwarzschild 半径**と呼ばれ，それによって指定される面はブラックホールの表面であるところの事象の地平面である．v^μ がブラックホール内で空間的になっていることが遠方の観測者がブラックホールの中に入ると空間的に（超光速で）運動することを意味はしないことに注意する．重要なことは

$$E := -g_{\mu\nu}p^\mu v^\nu \qquad (10)$$

で定義されるエネルギーが保存量であることである（$p^\mu\partial E/\partial x^\mu = 0$）*6)．そしてそれは遠方で評価する限り v^μ が時間的ベクトルであることがエネルギーとして自然なものとなっている．しかし，ブラックホール内部では v^μ が空間的ベクトルとなってしまうため，エネルギーというよりは運動量といったほうがふさわしい．運動量に符号の制約はない．あるのは保存則だけである．そこで遠方において，正のエネルギーをもった粒子 $E > 0$ をブラックホールに投げ込んで，ブラックホール内部において E_1, E_2 のエネルギーをもつ２つの粒子（粒子１，粒子２と呼ぼう）に分解したとする．保存則より $E = E_1 + E_2 > 0$ であるが，ブラックホール内部では $E_1 < 0$ となり得るので，$E_2 > E$ となることが可能である．粒子２のエネルギーは最初のエネルギーを超えることができるのである！*7)残念ながら，その粒子２はブラックホール内に留まるため外側の観測者には見ることができない*8)．しかし，このことを回転するブラックホールで考えると，極めて興味深い現象が起きる（**Penrose 過程**）．

回転するブラックホール時空は Kerr 解によって記述される．Schwarzschild 時空とは異なり，$v^\mu = dx^\mu/dt$ が光的になる面は事象の地平面の外側に存在し，それは回転軸上でのみ接している*9)．その間の領域はエルゴ領域と呼ばれている．従って，エルゴ領域内でかつ事象の地平面の外の領域においてある粒子が粒子１と粒子２に分解した場合，粒子１がブラックホールに落ち，粒子２がエルゴ領域の外側に運動する場合があり得る．そして $E_1 < 0$ であるならば，結局，最初のエネルギー E よりも大きなエネルギー $E_2 > E > 0$ を獲得

*5) 今の場合，v^μ は Killing ベクトルである．

*6) v^μ が Killing ベクトルであることと p^μ が測地線の接ベクトルであることを用いている．

*7) 読者の中には，時間座標 t の取り方が悪いだけと考える人もいるであろう．うまく時間座標をとれば，ブラックホール内部でも時間的な座標になっているはずだと．しかし，時空が静的に見える座標という制約を暗に今課しており，その下では時空は Schwarzschild 時空しかないことが Israel によって示されている．従って，今の座標 t ではブラックホール内部では v^μ は必ず空間的ベクトルとなってしまう．

*8) これは古典論の範疇での話である．もし量子論を考えるならば，外に抜け出すこともできる．これが Hawking 輻射である．

*9) ここで v^μ は Killing ベクトルとしている．そして，時間座標 t を用いると，解の計量の成分は t に依存しない．このような定常時空の漸近的平坦な真空ブラックホール解は Kerr 時空に限られることが証明されている（唯一性定理）．

した粒子を遠方で得ることになる．つまりエネルギーの引き出しができたわけである．エルゴ領域内では v^μ が空間的ベクトルとなるため式 (10) で定義された E はエネルギーというよりは，運動量と考えるのが自然であることを再度強調しておく．エネルギー収支としてはブラックホールの角運動量をエネルギーに転換させた，と考えるのが妥当である．この過程は実際の天体現象で起きていると考えられている．

4. 時空のエネルギー

一般相対性理論の原理の一つである等価原理は，局所的にいつでも重力が消せることを保証している．そのため時空自体のエネルギーの定義が一般的には困難である．しかし，時空に遠方領域が存在し十分遠方において時空が平坦な場合（漸近的に平坦な時空と呼ばれる），平坦な時空と同じ対称性が漸近的に存在するため*10)，その対称性を反映したエネルギーを自然に定義することができる．それは大域的な保存量となっていることが知られている．例えば，回転しないブラックホール解を表す質量 M の Schwarzschild 時空の場合，その Mc^2 が時空の全エネルギーとなっている．

一方で我々の宇宙は厳密な意味で遠方が存在するかどうかは自明ではない．例としてブラックホールや中性子星のようなコンパクトな天体を考えてみよう．十分天体から離れれば，時空の歪みは小さくなるであろう．ただ，離れすぎると宇宙の膨張の影響を受けてしまう．しかし，その間の空間的スケールでは漸近的に平坦な時空として十分よく近似できると期待される．現実の世界に厳密な意味で漸近的に平坦な時空があるとは考えにくいが，十分よい近似で実現されていると考えられる．

簡単のために，時間 t の一定面を考え，そこでの計量 g_{ij} の振舞いをみてみよう．空間の座標 x^i を適切に選ぶことができて計量の成分は

$$g_{ij} = \delta_{ij} + O(1/r) \tag{11}$$

のように書けるであろう．δ_{ij} は平坦空間の計量，r は動径座標である．以下では自然単位系を採用する．よって，以後 $c = 1$ ととる．

エネルギーの定義をするのには Einstein 方程式に戻るとよい．十分遠方で時空は

$$g_{ij} = \delta_{ij} + h_{ij} \tag{12}$$

のように書けるであろう．ここで簡単のために時空のいたるところで計量が上記のように書けるとしてみよう．その場合，h_{ij} の 1 次のオーダーの Einstein 方程式は

$$\partial_i\partial_j h^{ij} - \partial_i\partial^i h^j_j = 16\pi G T_{00} \tag{13}$$

となる．ここで，空間的遠方において時間変動は無視できるなどの近似を用いた．また ∂_i は偏微分 $\partial/\partial x^i$ の略記，$\partial^i = \delta^{ij}\partial_j$ である．添字 i, j で重複するものは $1, 2, 3$ と和をとる．T_{00} がエネルギー密度であるから，その体積積分が時空のエネルギーになることが期待される．よって，

$$\begin{aligned} E &= \int_{t=\mathrm{const.}} d^3x T_{00} \\ &= \frac{1}{16\pi G}\int_{t=\mathrm{const.}, r=\infty} (\partial_j h^j_i - \partial_i h^j_j) dS^j \end{aligned} \tag{14}$$

と書ける．ここで $dS^i = dSn^i$ で，n^i は法線ベクトルである．遠方での表面積分になっているため，遠方の観測者が測定できる量である．これは **ADM（Arnowitt, Deser and Misner）エネルギー**と呼ばれ，一般の漸近的に平坦な時空に対してこの表式は成り立つ．

5. 正エネルギー定理

Newton 重力では質量 M の天体がつくるポテンシャルエネルギーは

$$-\frac{GM}{r} \tag{15}$$

で与えられる．r は天体からの距離である．この

*10) 無限遠方には空間的なものと光的なものとが存在する．前者の漸近的対称性は Minkowski 時空と同じものになる．しかし，後者では重力波の影響により Minkowski 時空のもつ対称性に，超並進という不自然な対称性が加わってしまうことが知られている．これは 4 次元時空の特殊事情であることが知られている．

エネルギーが曲者である．エネルギーに底がないのである．系は底なしに不安定であることが予想される．しかし，強重力場中では重力は一般相対性理論によって支配される．このとき式 (14) のエネルギーは底なしであろうか．この問題の解決には Schoen と Yau[1]，それから Witten[2] の登場を待つ必要があった．彼らはエネルギー・運動量テンソル $T_{\mu\nu}$ が**主エネルギー条件**を満たす，即ち未来向きの時間的ベクトル t^μ に対して $-T^\mu_\nu t^\nu$ が未来向きの時間的あるいは光的ベクトルであれば，E が非負であること（$E \geq 0$）を示した（**正エネルギー定理**）．さらに，主エネルギー条件を満たしている場合に，$E=0$ は時空が平坦である，またそのときに限ることが示された (時空の剛性)．つまり，エネルギー最低の状態は平坦な時空なのである！

Schoen と Yau による証明は難解である．ここでは特別な場合に限りみてみよう．簡単のために時間一定面が極大超曲面と呼ばれるものに限り，さらにその面上の計量が共形平坦な場合（$g_{ij} = \Phi(x)^4\delta_{ij}$）を考えよう．$\Phi$ の漸近的な振舞いは $\Phi \sim 1 + GM/2r + O(1/r^2)$．さて，エネルギー密度が非負の場合（$T_{00} \geq 0$），Einstein 方程式の 00 成分*11) から時間一定面の Ricci スカラー ${}^{(3)}R$ が非負になることがわかる．極大超曲面は $g^{ij}K_{ij} = 0$ を満たしている．また，いまの場合 Ricci テンソルは関数 $\Phi(x)$ を用いて ${}^{(3)}R = -8\Phi^{-5}\Delta\Phi$ となる．Δ は平坦空間のラプラス演算子である．従って，$\Delta\Phi \leq 0$ である．よって，$M \sim -\int_{t=\mathrm{const.}, r=\infty} \partial_i \Phi dS^i = -\int_{t=\mathrm{const.}} \Delta\Phi d^3x \geq 0$．から，エネルギーが非負になることがわかる．

次に Witten による証明をみてみよう．スピノール ϵ を考え，それが $\gamma^i D_i \epsilon = 0$ を満たすものとする．γ^i は Dirac 行列，D_i はスピノールに対する空間的共変微分*12)．この ϵ を用いて Witten はエネルギー E が

$$\int_{S_\infty} \epsilon^\dagger D_i \epsilon dS^i \tag{16}$$

と書けることに気がついた．ここで $\dagger$ はエルミート共役を表す．これを体積積分に直して，恒等式 $D^i D_i \epsilon = \gamma^i D_i(\gamma^j D_j \epsilon) + (1/4){}^{(3)}R\epsilon$ を用いると，

$$\int_\Sigma \left[(D^i\epsilon)^\dagger (D_i \epsilon) + \frac{1}{4} {}^{(3)}R \epsilon^\dagger \epsilon \right] d\Sigma \tag{17}$$

と書くことができる．従って，被積分関数の第一項は非負であるから ${}^{(3)}R \geq 0$ を満たすならば，$E \geq 0$ が成り立つことが理解できる．さらに，$E = 0$ の場合，$D_i\epsilon = 0$ が導かれるが，$(D_iD_j - D_jD_i)\epsilon \sim {}^{(3)}R_{ijkl}\gamma^k\gamma^l$ が成り立つことを用いれば，漸近的に平坦な空間では ${}^{(3)}R_{ijkl} = 0$，即ち時間一定面が平坦空間であることが示される．

上で課した ${}^{(3)}R \geq 0$ は先述の主エネルギー条件に対応している．時間方向も含めた Witten の証明では主エネルギー条件が課される．またその議論によって $E=0$ の場合，時空が Minkowski 時空になることを示すことができるが，ここでは議論が煩雑なので割愛する．なお，スピノール ϵ は超重力理論における微小超対称変換を生成するスピノール η と関係していることが知られている．

6. 時空の“基底状態”

上でみたように，エネルギーが下限値であるゼロの値をとるとき，またそのときに限り時空が“基底状態”の Minkowski 時空となる．この事実は時空に様々な制限を課すことになる．平衡状態に対応する定常な時空を考えてみよう．特に真空でブラックホールが存在しない場合を考えよう．このような状況では，素朴には Minkowski 時空になることが期待される．しかし Einstein 方程式は非線形であるため，一般には自明ではない．真空中を伝播する重力波の定常な孤立系が存在するかもしれない（Geon と呼ばれている[3]）．実は真空で定常な時空の場合，そのような非自明な解が存在しないことが知られている[3]．定常時空の場合，Komar 質量公式が存在する[5]．ブラックホールが

*11) ${}^{(3)}R = K_{ij}K^{ij} + 16\pi G T_{00}$，$K_{ij}$ は時間一定面の外的曲率 $K_{ij} \sim \partial_t g_{ij}$．

*12) ここでは簡単のために，Riemannian 正エネルギー定理の紹介をしている．本節の最後のほうで本来の正エネルギー定理についてコメントする．

存在しない場合，エネルギーはエネルギー・運動量テンソルの体積積分で書かれる．従って，真空の場合直ちにエネルギーはゼロである．すると正エネルギー定理から時空がMinkowski時空であることが直ちにわかる．

ブラックホールが存在する場合には上記の議論は成り立たない．今度は有限の質量 M が存在する．Penrose はこの系に対して

$$M \geq 1/(4G)\sqrt{A/\pi} \tag{18}$$

が成り立つことを予想した（**Penrose 不等式**）[6]．A はブラックホール表面の面積である．与えられた面積 A に対して，質量 M は下から押さえられている．この不等式はある状況*13)では成り立つことが示されている．そして，等式が成り立つときに限り，時空が Schwarzschild 時空になることが知られている．一方で，上式は与えられた M の下で面積 A に最大値が存在するというようにみることもできる．そして，最大値の値をとる際に，時空は Schwarzschild 時空になる．実はブラックホールの熱力学から面積 A はエントロピーに対応していることが知られている[7]．よって，Schwarzschild 時空はエントロピー最大の平衡状態に対応していると考えることができる．

7. 結語

相対性理論ではエネルギーに対する理解が大幅に変更を受ける．特殊相対性理論の帰結として有名な $E = mc^2$ がある．そして一般相対性理論は時空の激しい湾曲により保存するエネルギーと思っていた量が運動量にすり替えられ，大変興味深いエネルギーの増幅機構を与える．一般相対性理論ではさらに時空自体のエネルギーを考える必要にしばしば迫られる．このように時空に関わる理論において，エネルギーの理解は重要な研究テーマの一つである．

現在の宇宙の加速膨張を説明するために，Einstein の一般相対性理論が正しいとすると，暗黒エネルギーあるいは宇宙定数の導入を余儀なくされる．実はこれは再度エネルギーの理解の変更，すなわち相対性理論に変わる新たな時空の理論の登場を示唆しているのかもしれない．様々な興味深い試みが行われているものの現時点で有望な理論は存在しない*14)．実のところ我々は電磁気力と同様に身近なはずの重力を意外にも理解していないことに気付く．Einstein 理論が正しいとすると，宇宙スケールでは正体不明の暗黒エネルギーなどの導入を迫られている．一方で 0.1 mm 以下の空間スケールでの重力についても我々は知らない．

重力，そして時空の理論の理解そのものが今後の物理の新たな展開を生み出すかもしれない．Einstein 理論を超える美しい理論の登場があるかもしれない．そして，それは究極の理論と呼ばれている超弦理論との相性もよいと期待したい．

*13) 時間一定面上の Ricci スカラーが非負であることが課される．面積 A はその面上の最も外側の極小曲面のものである．時間一定面が全測地的である場合，Einstein 方程式を用いると Ricci スカラーが非負であることは，その面に垂直に運動する観測者からみたエネルギー密度が正であることを課すことと等価である．また，その面上の極小曲面は見かけの地平面と呼ばれる事象の地平面の替わりにしばしば用いられる面に一致する．この証明でも正エネルギー定理が用いられていることに注意する．

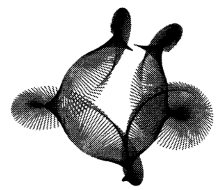
*14) 本特集号の向山氏の記事を参照されたし．

参考文献

1) R. Schoen and S.-T. Yau, *Commun. Math. Phys.* **79**, 231 (1981).
2) E. Witten, *Commun. Math. Phys.* **80**, 381 (1981); 白水徹也，SGC ライブラリ 90『アインシュタイン方程式』7.5 節（サイエンス社，2012）.
3) J.A. Wheeler, *Phys. Rev.* **97**, 511 (1955).
4) 古くは Einstein と Pauli の共同研究もある！ A. Einstein and W. Pauli, *Annals of Math.*, **44**, 131 (1943).
5) 例えば，E. Poisson, “A Relativist’s Toolkit”, Cambridge Univ. Press (Cambridge, England, 2004) の 4.3.3 節.
6) 最近の Review については，M. Mars, *Class. Quant. Grav.* **26**, 193001 (2009).
7) 例えば，前田恵一，SGC ライブラリ 63『重力理論講義』第 14 章（サイエンス社，2008）.

（しろみず・てつや，京都大学大学院理学研究科）

素粒子物理とエネルギー



小林　誠

1. 高エネルギー物理学

素粒子物理学は**高エネルギー物理学**とも呼ばれる．特に英語ではHigh Energy Physicsと呼ぶのが一般的である．高エネルギー物理学という名前は，素過程に関わるエネルギーが極めて高い（大きい）ことに由来している．通常の物質の物理現象や化学反応においては，その素過程に関わる電子や原子・分子のエネルギーは，高々数電子ボルト*1)と考えてよい．これに対して，素粒子物理学の対象とする現象では，素過程のエネルギーが1ギガ電子ボルト（$\mathrm{GeV} = 10^9\,\mathrm{eV}$）を超えるのが普通である．

通常の化学反応においては，反応の前後で電子や原子の総数は変わらないのに対して，高エネルギーの粒子が引き起こす素粒子現象においては，もはや粒子の数は一定には保たれない．このように粒子の生成・消滅が頻繁に起きることが素粒子現象の特徴ということができるが，これを理解するにはまず相対性理論にもとづいて粒子の振舞いを考える必要がある．

相対性理論においては自由粒子のエネルギー E と速度 v の関係は次のように表される．

$$E = mc^2 \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \qquad (1)$$

ここで c は光速度である．この式を v/c について展開し，速度が小さいときにどうなるかを見てみよう．

$$E = mc^2 + \frac{1}{2}mv^2 + O(v^4). \qquad (2)$$

ここで，右辺の第2項は古典力学における運動エネルギーとして見慣れたものである．第1項は，有名な，エネルギーと質量の間のアインシュタインの関係式を与える．上式から明らかなように，mc^2 は粒子が静止している時のエネルギーを与える．すなわち，

$$E_{静止} = mc^2. \qquad (3)$$

速度 v が光速度に比べて小さい通常の場合，静止エネルギーは第2項の古典的運動エネルギーに比べて圧倒的に大きい．それにもかかわらず，古典力学においては，第1項の存在を問題にしない．これが許されるのは，前述のように粒子の数が変わらないような現象を扱っていたからである．この場合，例えばエネルギー保存則において，静止エネルギーの項は反応の前後で相殺される．

ところが素粒子現象のように，粒子の生成・消滅が頻繁に起きる場合には静止エネルギーは本質的に重要である．粒子が生成されたときには静止エネルギーが現れ，消滅したときには消えるのであるから，エネルギー保存則も静止エネルギーを含めて考えなければならない．

逆にこれは，十分に大きなエネルギーを注ぎ込

*1) 電子ボルト（eV）はエネルギーの単位で，電子一個が1ボルトの電位差で加速されたときに得るエネルギーであり，$1\,\mathrm{eV} \approx 1.6 \times 10^{-19}\,\mathrm{J}$.

めば新しい粒子を生成することが可能であることを意味している．実際，高エネルギー物理学においては，高いエネルギーに加速した粒子の衝突により，未知の粒子を生成し，その性質を調べることが日常的に行われている．

粒子を生成する方法の一例を示しておこう．一般に粒子には対になる反粒子が存在する．粒子とそれに対応する反粒子は，質量が等しく，電荷を持っているならば，その符号が反対である．例えば，電子の反粒子は陽電子と呼ばれ，プラスの電荷を持ち，電子と同じ質量を持つ．通常，粒子とその反粒子は対になって生成されたり消滅する．これを対生成，対消滅という．この性質を利用すれば，未知の粒子をその反粒子との対生成によって作ることができる．

典型的な反応は，未知の粒子を X，その反粒子を $\bar{X}$ として，

$$\text{電子} + \text{陽電子} \to X + \bar{X} \tag{4}$$

というものである．電子と陽電子は対消滅して，そのエネルギーによって X と $\bar{X}$ が対生成される．衝突する電子と陽電子の（重心系での）エネルギーが，X 粒子の静止エネルギーの 2 倍を超えれば，この反応が可能となる．実際，この反応により多くの新粒子が発見され，その性質の研究が行われている．

ところで，アインシュタインの関係式 (3) を使って，素粒子の質量を，電子ボルトの単位で測った静止エネルギーの値で表すと便利である．例えば，電子の質量 $m_{\rm e}$ は

$$m_{\rm e} \approx 0.511\,{\rm MeV}/c^2 \tag{5}$$

であり，陽子の質量 $m_{\rm p}$ は

$$m_{\rm p} \approx 938\,{\rm MeV}/c^2 \tag{6}$$

となる．ここで，MeV はメガ電子ボルトと読み，$1\,{\rm MeV} = 10^6\,{\rm eV}$ である．

2. 素粒子の標準模型

以下の議論の準備のために，ここで素粒子の標準模型と呼ばれるものについて，基本粒子の構成を中心に説明しておきたい．

標準模型によると，物質の基本的な構成要素は，**クォーク**と**レプトン**という 2 種類に分類され，それぞれに 6 種の粒子が属する．

$$\text{クォーク} \quad \begin{matrix} {\rm u} & {\rm c} & {\rm t} \\ {\rm d} & {\rm s} & {\rm b}, \end{matrix} \tag{7}$$

$$\text{レプトン} \quad \begin{matrix} \nu_{\rm e} & \nu_\mu & \nu_\tau \\ {\rm e} & \mu & \tau. \end{matrix} \tag{8}$$

6 種のクォークのうち，通常の物質の中に存在するのは，u と d だけで，残りの 4 種は短時間で崩壊するので，我々の身の周りには普通存在しない．u と d は，uud の組み合わせで陽子を構成し，ddu の組み合わせで中性子となる．陽子と中性子は原子核を形成する．u は c, t とともに，単位電荷（陽子の電荷に等しい）の 2/3 の電荷を持ち，d は s, b とともに −1/3 の電荷を持つ．

一方，レプトンでは，通常の物質を構成するのは電子（e）のみであり，μ と τ は短時間で崩壊し，自然界に安定には存在しない．$\nu_{\rm e}, \nu_\mu, \nu_\tau$ はニュートリノと呼ばれる粒子であり，電荷を持たず，物質との相互作用が極めて弱いので，ほとんど何の痕跡も残さず宇宙空間を飛び交っている．

標準模型には，この他に，力を媒介する粒子である，**光子**，***W* 粒子**，***Z* 粒子**，および**グルーオン**が存在し，さらに最近その発見の報が注目を集めている**ヒッグス粒子**と呼ばれるものが存在する．このスキームが標準模型と呼ばれるのは，ほとんどの素粒子現象がこの模型によって説明できることによっている．

さて本稿の主題との関連で，以下で注目するのは標準模型に現れる素粒子の質量の値である．表 1 に基本粒子の質量を示した．数値は素粒子のデータを収集・分析しているパーティクル・データ・グループのレビュー[1)]の値を，誤差などを省略して掲げた．

表 1 ではニュートリノを省いた．カミオカンデの実験などから，ニュートリノが質量を持つことは分かっているが，その質量の値を決定することはま

表 1　基本粒子の質量.

基本粒子	質量
u	$2.3\,\mathrm{MeV}/c^2$
d	$4.8\,\mathrm{MeV}/c^2$
s	$95\,\mathrm{MeV}/c^2$
c	$1.275\,\mathrm{GeV}/c^2$
b	$4.18\,\mathrm{GeV}/c^2$
t	$173.5\,\mathrm{GeV}/c^2$
e	$0.511\,\mathrm{MeV}/c^2$
μ	$106\,\mathrm{MeV}/c^2$
τ	$1.777\,\mathrm{GeV}/c^2$

だできていない．ただ，その値は数 eV/c^2 以下と考えられており，極端に小さい．このためニュートリノの質量の起源は他の基本粒子とは異なるものと考えられている．

ニュートリノは別にしても，表 1 の基本粒子の質量は，電子の約 $0.5\,\mathrm{MeV}/c^2$ から t クォークの $173.5\,\mathrm{GeV}/c^2$ まで 5 桁以上の開きがある．実は我々はまだこの質量のパターンの真の起源を知らない．

しかし，理論の構造をよく見ると，これらの基本粒子の質量は，ある一つの物理量と関係づけられていることが分かる．その物理量とは，**ヒッグス場**と呼ばれるものの真空状態における値，$\langle 0|H|0\rangle$ である．ヒッグス場は，標準模型において，ゲージ対称性の自発的破れを引き起こすために導入された特別の場である．その発見が話題となっているヒッグス粒子は，このヒッグス場の振動に対応する．もう少し詳しく言えば，ヒッグス場の真空状態の値からのずれは波として伝わるが，量子論に従って量子化されたものがヒッグス粒子である[2]．

さて，ヒッグス場の真空での実際の値は次のようになっている．

$$\langle 0|H|0\rangle \approx 246\,\mathrm{GeV}c^{-1/2}\hbar^{-1/2}. \tag{9}$$

ここで $\hbar = h/2\pi$ で，h はプランク定数である．基本粒子の質量は，各基本粒子とこの真空状態のヒッグス場との相互作用から生ずる．基本粒子の質量がばらばらであるのは，相互作用の強さが基本粒子ごとにばらばらであるためである．

ところで，ヒッグス場は物理量としての次元は質量$^{1/2}$・長さ$^{1/2}$・時間$^{-1}$ であり，エネルギーの次元にはならない．従って，その真空での値も直接何らかのエネルギーを表すわけではない．一般に，次元の異なる量の大小を比較することはできないが，何らかの基準となる次元を持った定数を使って，物理量を異なる次元に換算すると便利なことが多い．このような定数として，相対性理論と量子力学の基本定数である光速度とプランク定数を使うことが多い*2)．冒頭で述べたアインシュタインの関係式も，光速度 c によって質量とエネルギーを換算する公式と見ることもできる．

もう一度式 (9) を見てみよう．右辺は，ヒッグス場の真空での値を c と $\hbar$ を使ってエネルギーに換算するとその値は $246\,\mathrm{GeV}$ になることを意味している．$\langle 0|H|0\rangle$ が基本粒子の質量の基準になる量であったことから，この $246\,\mathrm{GeV}$ という値は，標準模型を特徴づける一つのエネルギースケールを与えていると考えることができる．

3. 質量の起源

前節で，真空中のヒッグス場との相互作用から基本粒子の質量が生じることを説明した．基本粒子の質量だけでなく，力を伝える粒子のうち，W 粒子と Z 粒子の質量もまたヒッグス場との相互作用から生じる．ヒッグス場の相互作用を別にして，標準模型に現れる素粒子の基本的相互作用には，**強い相互作用**，**電磁相互作用**，**弱い相互作用**の 3 種類がある．W 粒子と Z 粒子はこのうち弱い相互作用を伝える粒子である．

弱い相互作用と電磁相互作用を比較したとき，性質の大きな違いの一つして，到達距離の違いがある．電磁相互作用は，クーロンの法則に見られるように遠くまで力が届く．これに対して，弱い相互作用はその作用の及ぶ範囲は極めて短距離である．この違いは，電磁相互作用を伝える粒子である光子の質量がゼロであるのに対し，W 粒子や

*2)　通常 c と $\hbar = h/2\pi$．特に $c = \hbar = 1$ となるような単位系を自然単位系と呼ぶ．自然単位系を採用したとして，c や $\hbar$ を書かないことが多い．

Z 粒子が重い質量を持つためである．ヒッグス場はもともと，W 粒子や Z 粒子に質量を与え，相互作用の到達距離の違いを説明するために導入されたものである．

ところで，ヒッグス場が基本粒子や W 粒子や Z 粒子に質量を与えることから，ヒッグス場あるいはヒッグス粒子を万物の質量の起源のように言うことがある．しかしこれは誤解を生む可能性のある表現であり，注意が必要である．

そのために，まず表 1 を見ると，u クォークと d クォークの質量は，それぞれ $2.3\,\mathrm{MeV}/c^2$, $4.8\,\mathrm{MeV}/c^2$ となっており，(6) に示した陽子の質量の $938\,\mathrm{MeV}/c^2$ に比べて極端に小さい．陽子は u クォーク 2 個と d クォーク 1 個からできているが，これらの 3 個のクォークの質量の和よりもはるかに重い．それなのに，なぜ陽子はクォーク 3 個に壊れてしまわないのであろうか．

この問題は，クォークを結びつける力である強い相互作用が，単独のクォークの存在を許さないような特殊な性質を持っていることによって説明される．特殊な性質とは，単独のクォークを引き離そうとしても，相互作用の効果が小さくならず，あたかもゴム紐につながれたような状態になるということである．このような状況の下で，クォークの質量をどう考えればよいかは単純ではない．単独で取り出せる粒子の場合のように，その軌道から質量を決めることができないためである．クォークは強い相互作用の効果により，その周りに一種の衣を着ることになる．表 1 に示したクォークの質量は，ヒッグス場との相互作用から生じた質量であるが，それらは強い相互作用の効果による衣を着る前の裸の質量と見ることができる．この事情はカイラル対称性の自発的破れとして理論的によく理解されているが，その説明は本稿の範囲を超えると思われるので，詳細は他の文献に譲る[3)]．

ここでは，以下のような簡単な議論で何が起きているかを理解してみよう．クォークの場合，表 1 に示したヒッグス場との相互作用によって生じる質量に，強い相互作用の効果から生じる質量が実効的に付け加わると考えることができる．この付け加わる質量の大きさは数百 MeV/c^2 と見積もられ，軽いクォークである u や d ではこちらが主要な部分となる．この考え方に従えば，陽子の質量もその大部分が強い相互作用から生じていることになる．

陽子とともに原子核を構成する中性子についても同じことが言える．原子の質量はその大部分が原子核の質量であるから，我々の身の周りの物質の質量はほとんどが強い相互作用に由来するものであり，ヒッグス場からの寄与は極めて少ないことになる．もちろん c, b, t のような重いクォークの質量についてはその大部分がヒッグス場起源であるが，通常の物質の中にこれらの重いクォークは含まれていない．結局，ヒッグス場はいろいろな粒子に質量を与えるが，通常の物質に関する限り，その質量の起源の主要な部分とは言えない．

ここで注意すべきことは，ヒッグス場の真空での値とは別に，強い相互作用に由来するエネルギースケールが現れる点である．これは強い相互作用の強さに関係して決まるエネルギースケールであり，標準模型の範囲内ではヒッグス場の値とは関係づけることのできない独立な量である．相互作用の強さを表す相互作用定数は，（自然単位系で）エネルギーの次元を持たないので，これがエネルギースケールを与えるのは不思議に見えるかもしれないが，場の量子論では相互作用定数は距離あるいはエネルギーとともに変化するので，たとえば相互作用定数が一定の強さになるエネルギーというようなものを考えれば，エネルギースケールが現れることは理解できる．この考え方に従って，エネルギースケールを定義するのは煩雑になるので，ここでは，上述のクォークの強い相互作用に由来する質量の大きさの数百 MeV/c^2 をこの第二のエネルギースケールと考えることにしてみよう．

結局，標準模型にはヒッグス場の真空での値と強い相互作用に由来する質量という二つのエネルギースケールが存在することになった．一般に一つの理論の中に，その関係を説明できない二つのエネルギースケールが現れるのは，その理論体系が未完成であることを示唆している．エネルギー

スケールの他にも，標準模型には多くのパラメータがあり，その値を理論の第一原理からは決めることができない．こうしたことから，標準模型は現実の素粒子現象をよく説明するが，最終的な理解ではないと考えられている．

4. 自然界のエネルギースケール

前節で，標準模型にはヒッグス場の真空での値と強い相互作用に由来するものと二つのエネルギースケールがあることを述べた．自然界にはこの他にいくつかの重要なエネルギースケールがある．この節では，それらについて簡単に触れておこう．

まず最も重要なエネルギースケールは，重力の強さに関係したものである．重力相互作用の強さを表す基本的な量はニュートンの万有引力の公式に現れる重力定数 $G_{\rm N}$ である．その大きさを今までと同じように，電子ボルトを単位としたエネルギーを使って表すと

$$G_{\rm N} = (1.22 \times 10^{19}\,{\rm GeV})^{-2}\hbar c^5 \qquad (10)$$

となる．この $1.22 \times 10^{19}\,{\rm GeV}$ を**プランクエネルギー**，対応する質量 $1.22 \times 10^{19}\,{\rm GeV}/c^2$ を**プランク質量**と呼んでいる．

プランクエネルギーは重力相互作用を特徴づけるエネルギースケールと考えられるが，標準模型のエネルギースケールに比べて著しく大きい．これらのエネルギースケールの間の関係はどう理解されるのであろうか．標準模型の基本的相互作用は強い相互作用，電磁相互作用，弱い相互作用の3種であることを述べた．そこでは重力相互作用が無視されていたが，それは標準模型に現れるような粒子の現象では重力相互作用の効果が極めて小さいためである．しかし，プランク質量程度の質量を持った重い素粒子やプランクエネルギー程度の極めて高エネルギーの現象を考えようとすると，重力相互作用はもはや無視できない．そのため重力相互作用を含んだ理論が必要となるのであるが，いまだそのような理論で満足できるものはない．超弦理論は有力な候補であるが，その全容はまだ見えていない．重力を含むすべての相互作用の統一的な理論が完成すれば，様々なエネルギースケールの間の関係も解明されるものと期待されている．

最近の宇宙論の研究から，宇宙のエネルギーの約74%が**ダークエネルギー**，約22%が**ダークマター**と呼ばれるものであり，通常の物質は4%程度にすぎないことがわかってきた．ダークマターは未知の粒子である可能性もあるが，その正体はいまだ不明であり，固有のエネルギースケールがあるとしてもまだ見えていない．一方，ダークエネルギーは，その起源は不明であるが，時間にほとんど依存しないエネルギー密度であるので，その密度の値はダークエネルギーを特徴づけるものと考えられる．ダークエネルギーのエネルギー密度を，これまでと同じように電子ボルトを使って表すと

$$\rho \approx 10^{-11}({\rm eV})^4 c^{-3}\hbar^{-3} \qquad (11)$$

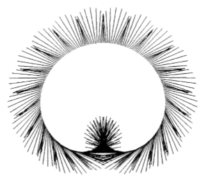
となる．エネルギー密度の次元は，エネルギー/長さ^3 であるが，長さは自然単位系でエネルギーの逆数になるため，$({\rm eV})^4$ が現れる．この密度の4乗根をとったものをダークエネルギーを特徴づけるエネルギースケールと考えると，その大きさは数ミリ電子ボルトになる．これは，これまでに登場したエネルギースケールに比べて著しく小さい．このエネルギースケールをどう理解したらよいか，新たな謎となっている．

参考文献

1) J. Beringer *et al.* (Particle Data Group), *Phys. Rev. D***86** 010001 (2012).
2) 小林誠，「真空とヒッグス場」，別冊数理科学 2006 年 10 月号.
3) 国広悌二，「ハドロン物質のカイラル相転移」，別冊数理科学 2007 年 10 月号.

（こばやし・まこと，高エネルギー加速器研究機構）

ダークエネルギー



向山 信治

1. はじめに

現在の宇宙は謎のエネルギーに満たされていて，そのエネルギーは万有引力ではなく万有斥力を生み出している，こう聞いてどう思うだろうか？ 驚くかもしれないが，これはSFの話ではなく，精密な観測データに基づく最新の宇宙像である．宇宙背景輻射と呼ばれる初期宇宙の残光や，重い星が一生を終える際の大爆発である超新星の観測から，現在の宇宙の膨張は加速していることが分かってきた．これをアインシュタインの一般相対性理論を使って説明するには，万有斥力を生み出すような，負の圧力を持ったエネルギーの存在を仮定しなくてはならない．しかも，現在の宇宙の7割以上がこの謎のエネルギーで占められていなければ，観測結果を説明することができない．この謎のエネルギーは**ダークエネルギー**と呼ばれているが，その正体は全く分かっていない．

2. 宇宙の膨張とエネルギー密度

アインシュタインは1905年に特殊相対性理論を打ち立て，時間と空間の概念を融合した．彼は“光の速さは一定”という実験事実を出発点とし，そこから数々の驚くべき帰結を導いた．しかし，時間と空間を統一した概念である**時空**は，全く変化することのない静的なものだった．その後10年を費やして定式化された一般相対性理論では，重力を時空の幾何として理論に組み込むことにより，「時空は物質の発展に影響を及ぼし，物質は時空を歪める」という構図ができあがった．結果，時空は静的なものではなくなり，物質と共に時間発展する動的な存在になった．実際，私たちの宇宙は静的ではなく，膨張している．遠くの銀河を観測すると，近くの銀河よりも赤く見える．これは，遠ざかる車の音が低く聞こえるのと同じ原理（ドップラー効果）で，銀河が宇宙膨張によって私たちから遠ざかっていることを示している．宇宙の膨張は，紛れもない観測事実なのだ．

宇宙膨張について，まずはニュートン力学の範囲で考察しよう．簡単のため，宇宙のモデルとして，密度一定で球対称なガスのかたまりを考える．単位質量あたりのエネルギー保存則は，

$$\frac{1}{2}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 - \frac{G_{\rm N}M}{r} = E \qquad (1)$$

となる．ここで，r はガスのかたまりの半径，M は全質量，E は単位質量あたりのエネルギー，$G_{\rm N}$ は重力定数である．ガスの密度を $\rho_{\rm gas} = M/(4\pi r^3/3)$ と導入すると，この式は

$$\frac{1}{r^2}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 - \frac{2E}{r^2} = \frac{8\pi G_{\rm N}}{3}\rho_{\rm gas} \qquad (2)$$

と書ける．

一般相対性理論においてエネルギー保存則に対応するのは，理論が時間座標の選び方に依存しないことを表す式（ハミルトニアン拘束条件）で，ア

インシュタイン方程式

$$G_{\mu\nu} = 8\pi G_{\rm N} T_{\mu\nu} \tag{3}$$

から導かれる．ここで，$G_{\mu\nu}$ は時空の計量 $g_{\mu\nu}$ から計算される幾何学量で，アインシュタイン・テンソルと呼ばれる．また，$T_{\mu\nu}$ は重力源となるエネルギー運動量テンソルである．アインシュタイン方程式の $\mu=\nu=0$ 成分を，一様等方な宇宙のモデルに適用したものはフリードマン方程式と呼ばれ，具体的には

$$\frac{1}{a^2}\left(\frac{da}{dt}\right)^2 + \frac{K}{a^2} = \frac{8\pi G_{\rm N}}{3}\rho \tag{4}$$

となる．ここで，a は宇宙の大きさを表すスケール因子，K は空間の曲がり具合を表す曲率定数，ρ は宇宙のエネルギー密度である．ガスのかたまりの式 (2) と比べると，

$$a \leftrightarrow r, \quad K \leftrightarrow -2E, \quad \rho \leftrightarrow \rho_{\rm gas} \tag{5}$$

という対応に気がつくだろう．

宇宙のエネルギー密度 ρ は様々な成分によって構成されていて，

$$\rho = \rho_{\rm nr} + \rho_{\rm r} + \cdots, \quad \rho_{\rm nr} \propto \frac{1}{a^3}, \quad \rho_{\rm r} \propto \frac{1}{a^4}, \quad \cdots \tag{6}$$

のように各成分が異なる振舞いをする．ここで，$\rho_{\rm nr}$ は非相対論的な物質（通常のガス等），$\rho_{\rm r}$ は相対論的な物質（輻射やニュートリノ等）のエネルギー密度を表す．これらの振舞いは，各成分 i $(i = {\rm nr}, {\rm r}, \cdots)$ のエネルギー密度 ρ_i と圧力 P_i が満たす関係式（状態方程式）

$$P_{\rm nr} = 0, \quad P_{\rm r} = \frac{\rho_{\rm r}}{3} \tag{7}$$

を，連続の方程式

$$\frac{d\rho_i}{dt} + 3H(\rho_i + P_i) = 0 \tag{8}$$

に代入すれば得られる．連続の方程式は，体積 $V \propto a^3$ を導入すれば

$$d(\rho V) = -P dV \tag{9}$$

と書けるので，エネルギーの変化と外部から得た仕事量の釣り合いの式と解釈することもできる．

3. アインシュタインの静的宇宙解と宇宙項

アインシュタイン本人は当初（1917 年頃），当時のほとんどの人々がそうであったように，宇宙は静的であるはずと考えていた．しかし，彼の理論は静的な宇宙を許さなかった．それを見るには，フリードマン方程式 (4) の時間微分をとり，連続の方程式 (8) を使って，加速度の式

$$\frac{1}{a}\frac{d^2a}{dt^2} = -\frac{4\pi G_{\rm N}}{3}\sum_i(\rho_i + 3P_i) \tag{10}$$

を導くのが良いだろう．この式は，アインシュタイン方程式 (3) から直接導くこともできる．非相対論的な物質と相対論的な物質の寄与を考慮する限りにおいて，右辺は明らかに負である．したがって，スケール因子 a は定数ではあり得ない．

そこでアインシュタインは，静的な宇宙を理論の解として許すため，彼の方程式 (3) を修正して，

$$G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi G_{\rm N} T_{\mu\nu} \tag{11}$$

のように左辺に新しい項 $\Lambda g_{\mu\nu}$ を加えることにした．ここで，Λ は定数である．結果として，フリードマン方程式は

$$\frac{1}{a^2}\left(\frac{da}{dt}\right)^2 + \frac{K}{a^2} = \frac{\Lambda}{3} + \frac{8\pi G_{\rm N}}{3}\rho \tag{12}$$

のように修正を受ける．一方，連続の方程式 (8) はそのままで，加速度の式 (10) は (12) と (8) から（あるいは直接 (11) から）

$$\frac{1}{a}\frac{d^2a}{dt^2} = \frac{\Lambda}{3} - \frac{4\pi G_{\rm N}}{3}\sum_i(\rho_i + 3P_i) \tag{13}$$

のように修正を受ける．もし Λ が正であれば，この式の右辺を零とすることが可能だ．そして，アインシュタインの目論見通りに静的宇宙を得るには，さらに曲率定数 K を調整して，(12) が $da/dt = 0$ を与えるようにすれば良い．静的宇宙解を得るために導入された定数 Λ は，**アインシュタインの宇宙項**と呼ばれる．

実は，アインシュタインの静的宇宙解は不安定である．宇宙項入りのフリードマン方程式 (12) は，

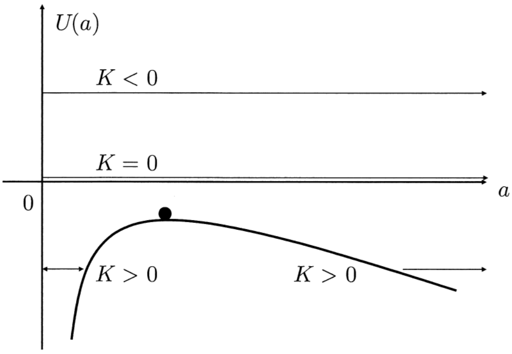


図 1 $\Lambda > 0$ の場合の $U(a)$ の振舞い．

$$\frac{1}{2}\left(\frac{da}{dt}\right)^2 + U(a) = -\frac{1}{2}K \qquad (14)$$

のように，1 次元空間における非相対論的粒子のエネルギー保存則の形に書き直すことができる．ここで，ポテンシャル $U(a)$ は

$$U(a) = -\frac{a^2}{6}\left(8\pi G_{\rm N}\rho + \Lambda\right) \qquad (15)$$

で与えられ，ρ に通常のガスや輻射の寄与を考えると，$\Lambda > 0$ の場合の大雑把な振舞いは図 1 のようになる．アインシュタインの静的宇宙解は，このポテンシャルの丘の上に止まっている状態に対応しており，明らかに不安定である．

4. 真空のエネルギー密度と宇宙項問題

アインシュタインが導入した宇宙項は，実は今でも研究者たちを悩ませている．本節では，宇宙論と理論物理学において最も難しい問題の 1 つと言われる『**宇宙項問題**』について説明しよう．この問題は，本稿のテーマであるダークエネルギーと密接な関係がある．

物理学の多くの分野や問題において，エネルギーの値そのものには物理的意味はなく，観測可能な物理量に影響を与えるのはエネルギーの差や変化量である．しかし，一般相対性理論では，全エネルギーが重力の源となるため，値そのものが物理的意味を持つ．**真空のエネルギー**も例外ではない．

場の理論における真空とは，系のハミルトニアン（$\simeq$ エネルギー）を最小（または極小）にする量子状態である．一般相対性理論は，時空の曲率半径に比べて十分小さなスケールでは特殊相対性理論と同等になるように作られている．真空がこの性質を保つと仮定すると，エネルギー運動量テンソル $T_{\mu\nu}$ への真空の寄与は，時空計量 $g_{\mu\nu}$ に比例することになる．この場合，アインシュタイン方程式 (11) において，真空の寄与を $T_{\mu\nu}$ に加えることは，宇宙項 Λ をずらすことと数学的に同等である．つまり，真空のエネルギー密度（に $8\pi G_{\rm N}$ を乗じたもの）は，宇宙項と等価である．

問題は，真空のエネルギー密度の値である．量子場は，相互作用が弱い極限では調和振動子の集まりと考えることができるが，各調和振動子は不確定性原理により零点振動エネルギーを持つ．この零点振動エネルギーを，理論が適用可能な範囲ですべて足し上げて全体の体積で除せば，真空のエネルギー密度の大きさを大雑把に評価できるだろう．このようにして真空のエネルギー密度を計算すると，$\sim M^4$ という値が得られる．ここで，M は考えている理論が適用可能なエネルギーの上限である．典型的には，M としてプランク・エネルギー $M_{\rm Pl} = 1/\sqrt{G_{\rm N}} \sim 10^{19}\,{\rm GeV}$，すなわち量子重力が本質的になると考えられるエネルギーを選ぶことが多い．この場合，真空のエネルギーの宇宙項への寄与として

$$|\Lambda_{\rm vac}| \sim M_{\rm Pl}^2 \qquad (16)$$

という値を得る．

第 3 節では，一様等方宇宙の発展方程式が，(14) のように 1 次元空間における非相対論的粒子のエネルギー保存則と同等であることを見た．図 2 に $\Lambda = 0$ の場合のポテンシャル $U(a)$ の大雑把な振舞いを示す．ここで，ρ としては通常のガスや輻射の寄与を考慮して，$\rho a^2 \to 0$ $(a \to \infty)$ と想定した．系のエネルギーに対応するのが $-K/2$ であることに注意すると，$\Lambda = 0$ の場合には，K が零または負だと宇宙は膨張し続け，正だと膨張から収縮に転ずることが分かる．

一方，図 3 に示した $\Lambda < 0$ の場合には，任意の K に対して，宇宙は膨張から収縮に転ずること

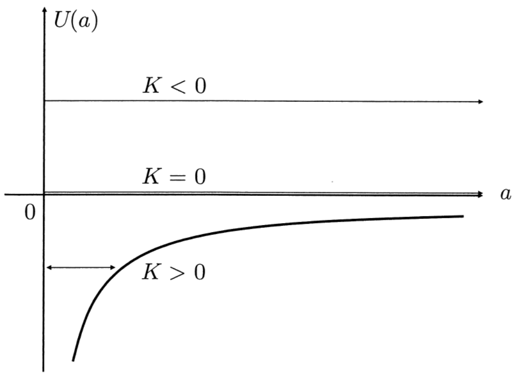


図 2　$\Lambda = 0$ の場合の $U(a)$ の振舞い．

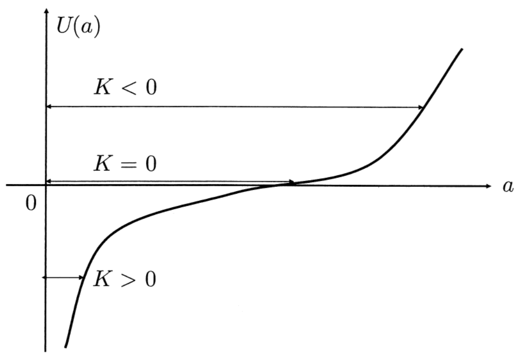


図 3　$\Lambda < 0$ の場合の $U(a)$ の振舞い．

になる．これは，負の宇宙項による寄与 $\propto |\Lambda| a^2$ が，大きな a の領域にポテンシャルの壁を作るからである．これでは，$|\Lambda|$ の値を極端に小さくしない限り，宇宙はすぐに収縮してビッグクランチと呼ばれる超高密度の状態に至り，宇宙のすべての構造は粉砕されてしまう．太陽等の天体の年齢よりも宇宙膨張が長く続くためには，量子場の理論を単純に適用して計算した値 (16) に比べ，$|\Lambda|$ は 120 桁も小さくなければならない．

逆に $\Lambda > 0$ の場合には，図 1 から分かるように，任意の K に対して，(ある程度大きな a から始めれば) 宇宙は膨張し続けることができる．この点においては，正の宇宙項は問題ないように思える．しかし，a が増加するにつれ，正の宇宙項による寄与 ($\propto -\Lambda a^2$) は，Λ が極端に小さくない限り，他の寄与を明らかに凌駕する．そして，まるで粒子がポテンシャルを転げ落ちるように (図 1 の大きな a の領域を再度参照のこと)，宇宙の膨張は加速されて，$\Lambda = 0$ の場合よりも激しいものとなる．これでは，いつまで経っても宇宙の膨張率は減少せず，観測されている膨張率と矛盾する．そして，(16) に比べ，Λ はやはり 120 桁も小さくなければならないという結論に至る．

これは，宇宙の全エネルギー密度を観測と合わせるためには，120 桁もの微調整が必要になるということを意味する．これが宇宙項問題である．120 桁もの微調整を必要とする問題は他に類をみないため，現代宇宙論および理論物理学における最大の謎の 1 つと考えられている．

5. 宇宙の加速膨張とダークエネルギー

ここで，第 3 節の議論に少し戻ろう．アインシュタインが静的宇宙解の不安定性に気づいていたならば，1929 年から 1931 年にかけてのハッブルによる発見を待つことなく，彼は宇宙膨張を予言していたかもしれない．アインシュタイン自身は，宇宙項の導入を，人生最大の失敗だったと言っている[1)]．1917 年の彼にとっての宇宙項は，静的宇宙解を許すためだけに導入したものであり，宇宙が静的でないことが観測で判明した時点で，全く不要な存在となったのである．

多くの研究者が，きっと宇宙項は何らかの理由で厳密に零になっているのだろうと長い間考えてきた．前節で説明した宇宙項問題は「宇宙項はなぜ小さい？」という問題であるが，あまりにも小さな値が要求されるので，「宇宙項はなぜ零か？」という問題に置き換えて解決策を探していた．

しかし，1998 年以降，宇宙項問題は新たな展開を迎えた．遠方の Ia 型超新星や宇宙背景輻射の観測から，現在の宇宙が**加速膨張**していることが分かったのである．これは，宇宙項問題だけでなく，物理学全体における大発見であった．実際，2011 年のノーベル物理学賞は，超新星の観測で宇宙の加速膨張を発見したパールマッター，シュミット，リースの 3 氏に与えられている．

アインシュタインが静的宇宙解を得るために宇宙項 Λ を導入したのは，加速度の式 (13) の右辺

を零にするためだった．観測されている宇宙の加速膨張は，これが零どころか正であることを意味し，$\rho_i + 3P_i$ が正である限り，やはり $\Lambda > 0$ を必要とする．逆に $\Lambda = 0$ だとすると，(12) と合わせ，宇宙には

$$\rho_{\rm de} + 3P_{\rm de} < 0, \quad \rho_{\rm de} > 0 \tag{17}$$

を満たす成分 ($i = {\rm de}$) があり，他の成分を上回っていることを意味する．この成分は，暗黒エネルギーまたはダークエネルギーと呼ばれている．

ダークエネルギーは，それが宇宙の加速膨張の原因だとすると，現在の宇宙の 7 割以上を占めていると考えられる．その性質を特徴づける量としては，**状態方程式**と呼ばれる

$$w \equiv P_{\rm de}/\rho_{\rm de} \tag{18}$$

が有用である．加速膨張を実現するためには，(17) により $w < -1/3$ が必要である．また，簡単のため w を定数とすると，連続の方程式 (8) により，

$$\rho_{\rm de} \propto a^{-3(1+w)} \tag{19}$$

と振る舞うことがわかる．Planck グループの宇宙背景輻射の観測によると，68% の確からしさで

$$w = -1.13^{+0.13}_{-0.10} \tag{20}$$

である[2]．一方，第 4 節の議論から明らかなように，宇宙項 Λ は時間に依存しない $\rho_{\rm de}$ と等価であり，$w = -1$ に対応する．この値は観測による制限 (20) を満たしており，したがって，宇宙項をダークエネルギーの候補と見なすことは可能である．

各成分のエネルギー密度の振舞い (6) から，非相対論的な物質のエネルギー（エネルギー密度に体積 $\propto a^3$ を乗じたもの）は一定，相対論的な物質のエネルギーは $\propto 1/a$ のように宇宙膨張とともに減少することがわかる．一方，ダークエネルギーのエネルギー密度 $\rho_{\rm de}$ はほとんど一定値のため，エネルギーとしては宇宙膨張とともに増加する．これは驚くべきことであるが，(9) を見ると，ダークエネルギーが負の圧力を持つことに起因していることが分かる．つまり，体積変化による外

部との仕事のやりとりが通常と逆符号のため，膨張することで逆にエネルギーを得るのだ．

6. ダークエネルギーか新しい重力理論か？

以上のように，最近明らかになった宇宙の加速膨張は，一般相対性理論に基づいて説明しようとすると，ダークエネルギーの存在を示唆する．ダークエネルギーは，もしも本当に存在するのであれば，負の圧力を伴うことで万有斥力を生じ，宇宙が膨張すると増加するという，驚くべき性質を持つはずである．しかし，本当に存在するのか，存在するのであればその正体は何なのか，全く分かっていないのが現状である．

歴史的には，19 世紀にこれと似た状況が知られている．惑星の軌道の精密な観測により，水星の近日点移動と呼ばれる現象が発見されたが，ニュートンの万有引力の法則と運動方程式では説明できなかった．そこで，人々は見えない惑星を導入して説明しようとした．この仮説上の惑星はヴァルカンと呼ばれ，発見したと主張した人もいたそうである．しかし，本当の答えは“重力理論を変える”ということであった．アインシュタインの一般相対性理論は水星の近日点移動を見事に説明し，ニュートン力学に変わる，新しい重力理論としての地位を獲得したのであった．

この歴史的事実を鑑みれば，少なからぬ研究者が「ダークエネルギーを導入する代わりに，一般相対論を変更することはできないか？」と考えるのも理解できる．ダークエネルギーは，一般相対性理論で加速膨張を説明しようとすると必要だが，もしも重力が変更を受けるのなら，もしかすると必要ないのかもしれない．ダークエネルギーか新しい重力理論か？ この論争はまだ始まったばかりであり，新しいアイデアによる進展と新しい観測データによる検証が待たれる．

7. ダークエネルギーと宇宙の将来

宇宙の将来は，ある意味ではダークエネルギーが握っていると言える．ダークエネルギー密度が，今後減っていって最終的に負になるようなことがあれば，宇宙の膨張は止まって収縮に転ずるだろう．その場合には，**ビッグクランチ**と呼ばれる超高密度の状態に至り，銀河を含め宇宙のすべての構造は粉砕される．そこで宇宙は終わると考えるのが自然だが，もしかすると何らかの理由でビッグクランチから**ビッグバン**（大爆発）に転じ，宇宙が膨張を再開する可能性も完全に否定はできない．

逆に，ダークエネルギー密度が増加するようなことがあったらどうだろう．もしも増加し続けるとすると，万有斥力がどんどん強くなり，宇宙内の構造物はすべてばらばらに引き裂かれてしまうだろう．これは**ビッグリップ**と呼ばれている．これも，宇宙の終わりの可能性の 1 つだろう．

以上 2 つの可能性の間，つまりダークエネルギー密度が一定，または減少するにしても負にならない場合はどうだろう．この場合，古典力学に従う限り，宇宙膨張に終わりはない．最終的には，太陽を含むすべての恒星は核燃料を使い果たして輝きを失い，活動のない真っ暗な宇宙が，真空に向かって膨張を続けるだけになるだろう．この場合，（古典力学的に従う限り）宇宙は永遠の命を与えられるが，寂しい晩年を迎えることになる．

しかし，真っ暗で何も起こりそうにないような宇宙にも，量子効果によって，驚くべき変化が起こることがある．例えば，古典力学的にはダークエネルギー密度が負になり得ない状況であっても，量子トンネリングによって突然，負に向かって進み始めるようなこともあり得る．そのようなことが起こると，上述のように宇宙は収縮し始め，最終的にはビッグクランチへと至るだろう．究極の統一理論の候補とされる超弦理論は，このような量子トンネリングが，長い時間の間には必ず起こると予言する．この予言が正しければ，私たちの宇宙の終末は，ビッグクランチである．

ここで“私たちの宇宙”と表現したのには，それなりの理由がある．生まれたばかりの小さな宇宙は，インフレーションと呼ばれる急激な加速膨張によって巨視的なサイズに引き延ばされ，その後

で熱い火の玉宇宙に転じたと考えられている．佐藤やグースらによって提唱されたインフレーションは，理論として美しいだけでなく宇宙背景輻射の観測結果を正しく予言するため，現代宇宙論の一大要素として多くの研究者によって支持されている．

永遠の**インフレーション**と呼ばれるシナリオでは，1つの宇宙の中で“ポケット宇宙”とでも呼ぶべき“小さな”宇宙が次々に量子揺らぎから生まれ，それらの“小さな”宇宙の中でも次世代の“ポケット宇宙”が生まれ続ける．これは，全体として複雑な構造を成すが，それぞれの“ポケット宇宙”は，その中の住人にとっては途方もなく大きな宇宙であり，彼らがその外を観測することはできない．したがって，もしかすると私たちも，無数にある“ポケット宇宙”の中の1つに住んでいるのかもしれない．

超弦理論は，各“ポケット宇宙”の中の各点が必ずビッグクランチを迎えることを予言する．私たちの住む宇宙も“ポケット宇宙”の1つであると考えると，その中の各点もビッグクランチで終焉を迎えることになるだろう．しかし，次々と生まれ続ける“ポケット宇宙”の集合体としての全体の宇宙は，決して終わることがない永遠の存在である．永遠のインフレーションは，“私たちの宇宙”には永遠の命を与えてくれないが，それを含む全体の宇宙に終わりはないのだ．

ここで述べたどのシナリオが実現するのかは，ダークエネルギーまたはそれに変わる新重力理論の性質次第である．今後，どんな新しいアイデアや観測データが出てくるのか楽しみである．

参考文献

1) G. Gamow, “My World Line – An Informal Autobiography”, Viking Press, New York (1970).
2) P.A.R. Ade *et al.* [Planck Collaboration], “Planck 2013 results. XVI. Cosmological parameters,” arXiv:1303.5076 [astro-ph.CO].

（むこうやま・しんじ，東京大学国際高等研究所カブリ数物連携宇宙研究機構）

高エネルギー加速器とは



生出　勝宣

高エネルギー加速器の代表格は，スイス・ジュネーブ郊外のヨーロッパ原子核研究所（CERN）にある人類史上最大，周長 27 km の Large Hadron Collider（LHC）である．LHC が昨年夏に新粒子を発見し，今年 3 月にはその基本的な性質からそれがヒッグス粒子であることを強く示唆したことは記憶に新しい．LHC は互いに交差する 2 つの陽子シンクロトロン（実際には両リングの超伝導磁石は一体構造）から成り立ち，これまで各 4 兆電子ボルト（4 TeV）の陽子ビームを 4 カ所の衝突点で衝突させ，ヒッグス粒子の生成を含む様々な素粒子反応を起こさせている．

「加速器」とは言っても，LHC ほどの高エネルギー加速器では，粒子の速度はほとんど光速に近づいており，それ以上「加速」しても速度はほとんど変わらない．LHC の 4 TeV の粒子はローレンツ因子 $\gamma = E/mc^2 \approx 4{,}300$ であり，光速に対する速度の比は $v/c = \sqrt{1 - 1/\gamma^2} \approx 0.999\,999\,97$ である．つまり「加速」によって変わるのは，粒子の速度ではなく，その運動エネルギーである．ちなみに，LHC の片方の陽子ビームの量は電流換算で 0.4 A ほどであるが，その運動エネルギー（1 粒子あたり 4 TeV）はビーム全体で約 150 MJ になり，東海道新幹線（1 編成 700 t）が時速約 74 km で走る場合の運動エネルギーと同等である（これらは LHC の 2013 年までの運転数値であり，エネルギー・電流の設計値は 7 TeV・0.6 A である）．静止質量が 4×10^{-13} kg にすぎない陽子ビームに，これだけの運動エネルギーを与えるのが高エネルギー加速器である．

このように LHC は史上最高のビームエネルギーを達成したが，実はビームの速度では他の数々の電子・陽電子の加速器には及ばない．電子を LHC の陽子と同じ速度にするには，0.0022 TeV（= 2.2 GeV）に加速するだけでよい．このような電子・陽電子の加速器は世界に 30 台以上稼働しているが，その中での最高はやはり LHC と同じトンネルに作られていた Large Electron-Positron Collider 2（LEP2）であり，ビームエネルギーは 104 GeV まで到達した．その速度は光速に対して 0.999 999 999 988 倍であった．

LHC の陽子ビームは通常 20 時間くらいは周回する（周回させるだけならさらに何日でも可能であるが，ルミノシティと呼ばれるビームの衝突性能が衝突とともに劣化するので，ある時点でビームは強制的に捨てられる）．ビームの速度はほぼ光速であるから，20 時間での飛行距離は 200 億 km を超え，太陽系の外に出てしまうほどの距離をビームは飛行している．しかも LHC の場合，毎周直径が 20 μm 程度の相手のビームと交差しながらの飛行であり，通常の物体ではこのような長距離かつ高精度の飛行はまず実現不能である．飛行距離

以上に注目すべきはその周回数である．LHC では 20 時間での周回数は約 8 億回であるが，より小型の加速器では周回数は周長に反比例して増え，地球の誕生以来の公転回数を上回ることは珍しくない．ビームのこのような多数回の安定した周回が可能になるのは，LHC の場合は約 1,000 台の収束電磁石の巧妙な配置により，少なくとも中心軌道の周りの小振幅の粒子については，3 次元の運動の安定性が数学的に保証されるからである．

今，「小振幅の粒子」と言ったが，LHC の場合は周回部での横方向（進行方向と直角の方向）のビームサイズは大きいところで $\sigma = 1\,\mathrm{mm}$ 程度であり，その 5–10 倍程度の振幅までは長時間にわたって粒子は安定に周回する．しかし，より振幅が大きくなると，一般にそのような安定性は失われる．これは，収束電磁石の磁場の非線形性やビームの運動そのものに内在する非線形性などにより，運動の可積分性が失われ，解析解がなくなることに起因する．このような運動を計算機上で追いかけてみると，粒子の振幅は周毎に徐々に増大するわけではなく，ある周で突然増大が始まり，急速に発散することがわかる．一体何周目でそのような発散が発生するかは，粒子の初期条件のごくわずかの違いで全く異なり，予言不能である．これは収束力のすべての条件が既知の計算機上においてすら予言できないということで，計算上の誤差や観測の精度とは別のことである．このような現象は，小惑星の一つの運動がいつ安定軌道を外れるか直前まで予測できないのと似ている（実際の小惑星の場合は測定誤差の問題も含むであろう）．高エネルギー加速器は様々な技術に支えられているわけであるが，このような非線形運動の問題は数理科学的にも興味深いものである．

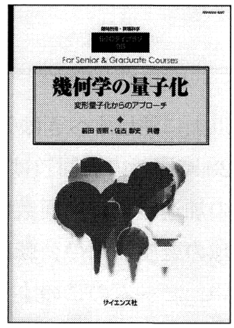
大振幅の運動の予測不能性は，加速器全体の設計に大きな影響を及ぼす．一般に口径の小さい電磁石を使うと非線形性が増大し，ビームの安定域（力学口径）が減少する．その評価は上記のように解析的に行うことはできないので，計算機上のシミュレーションに頼るしかない．米国で 1993 年に中止された Superconducting Super Collider（SSC）計画では，当初計算機能力の不足もあり，非線形磁場の影響を過小評価した結果，小口径の電磁石で設計を始めてしまった．しかし，年々の計算機能力の向上とともに，より口径の大きな電磁石の必要性が明らかになり，建設予算の数倍の上昇を招き，結局米議会による中止決定に至ったのである．LHC では SSC の経緯もふまえ，過小評価に陥らず，十分なビームの安定域を確保できた．

実際の加速器では，上記の静的な非線形性以外にも，相手ビームや残留ガスとの衝突・電磁石電源のノイズ・寄生電磁場などによりビームの運動はかく乱され，ビームサイズは徐々に増大する．一定の振幅を超えた粒子はいつ衝突点の高価な検出器に飛び込み破壊を招くかもしれない．そこで LHC のような衝突型加速器では一定振幅を超えた粒子はコリメータという装置に衝突させ，積極的に除去する．これにより，ビーム強度も徐々に減少する．

加速器では，上記の他にも数々の数理科学的に未解決の問題が残されている．例えばビームどうしの衝突ではお互いのビームが相手に及ぼす電磁場は，ビームの電荷が空間的に極めて狭い領域にあるため，通常の電磁石とは比較にならないほど強い非線形力を生み出す．その影響により両方のビームの分布は大きく変化するが，その正確な評価はスーパーコンピュータにおいても容易ではない．ビームは自分自身に含まれる粒子に対しても強い非線形力を及ぼすが，これは大強度の低エネルギー加速器において顕著であり，やはり評価が難しい．また，ビームの電荷が周囲の環境との相互作用で生み出す電磁場のビーム自身への反作用もやはり強い非線形性をはらむもので，未解決の問題の一つである．

以上のように，高エネルギー加速器は数理科学的な問題の宝庫であり，この方面からも若い方々の参画を大いに期待するものである．

（おいで・かつのぶ，高エネルギー加速器研究機構）



幾何学の量子化

変形量子化からのアプローチ

前田吉昭・佐古彰史共著，B5 判，192 頁，本体 2429 円，サイエンス社

幾何学といえば，ユークリッド幾何学やさらにリーマン幾何学を一番に思い浮かべるが，その量子化というのはいったい如何なる概念なのか？ 本書は変形量子化の立場から，多様体を対象とする通常考えられている幾何学のある種の一般化として，幾何学の量子化について解説している．

量子化は物理的には，座標と運動量の間に交換関係を導入することを意味する．古典力学では，粒子のある時刻における運動の状態は，座標と運動量を指定することで記述できる．そこで解析力学では位置と運動量を合わせた空間，いわゆる相空間を考え，粒子はその中を運動すると考える．例えば 1 粒子の場合，位置と運動量はそれぞれ 3 成分ベクトルなので，相空間は幾何学的に見れば 6 次元空間ということになる．量子化はこの 6 次元空間上の関数代数から非可換な代数を構築する操作と見ることができる．量子化後に，もとの 6 次元空間を幾何学的に議論しようとすれば，この非可換になった関数代数をもとに幾何学を構築することになり，それはいわゆる量子空間または非可換空間上の非可換幾何学を考えることになる．本書は，このような非可換幾何学へのアプローチの入門書になっている．相空間の概念は数学的に定式化でき，一般化された相空間はポアッソン多様体と呼ばれる．それを対象とする幾何学は通常の幾何学の延長上にあり，シンプレクティック幾何学やポアッソン幾何学と呼ばれる．変形量子化はこの一般化された相空間の量子化を系統的に構成していく方法である．量子化前の空間を古典力学にならって古典的空間と呼ぶならば，このようにして得られた空間は非可換な対象物であり，筆者たちの目指す「量子的な微分幾何学」を展開する舞台となる量子化された空間を与える．

本書の構成は，まず準備として本書の理解に必要な多様体と微分幾何学に関するいくつかの項目が簡単にまとめられている．その後，古典力学，特に解析力学から量子力学に至るいわゆる物理における量子化の過程を要約するとともに，そこから抽象化されたポアッソン代数とその量子化について数学的な定式化を与える．その後，その代数の変形量子化の定義とその一般論が展開されている．そこには，いくつかの具体例が挙げられており，これらの理論の理解の助けとなる．4 章においてはシンプレクティック多様体の変形量子化に関して，de Wilde–Lecomte の構成法，大森–前田–吉岡の構成法，Fedosov の構成法がまとめられ，最後に Kontsevich による一般のポアッソン多様体上での変形量子化がその具体的な構成法とともに解説されている．このように，それぞれ特色のある量子化の方法が詳しく解説されているので，それぞれの特徴を比較することができる．5 章には，変形量子化の例が挙げられており，非可換平面や非可換球面，非可換ケーラー多様体などが変形量子化によってどのように構成されるかが解説されている．

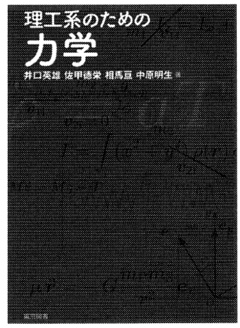
一方，6 章では変形量子化の場の理論への応用，特にゲージ理論への応用が解説されている．ここでは，変形量子化の例としては最も簡単な Moyal 積によって与えられる非可換ユークリッド空間を考え，その空間上のゲージ理論の様々な古典解が議論されている．この章に関しては，それまでの章の知識を必ずしも必要としないので独立して読むことができる．最後に 7 章においては，変形量子化の収束の問題が議論されている．変形量子化では，量子化はすべてプランク定数 $\hbar$ の形式的な級数として定義されており，$\hbar$ に実際の数を代入したときの，その級数の収束は通常議論されない．この章では，その収束性の問題を取り上げている．しかし，この問題はまだ完全に解明されているわけではなく，内容も今後の問題として，そこには結合性の崩れなどの現象が現れることが提示されている．

全体として本書は，この分野に興味のある数学や物理の大学院生向けの入門書という形で書かれているが，変形量子化に関する広範囲にわたるレビューが含まれており，研究者にとっても有用な書と言える．また，「非可換幾何学」という言葉をどこかで見たり聞いたりして興味を持たれた方にとっても，少し難しいところもあるかもしれないが，ある程度の予備知識があれば読み進めることができるだろう．

綿 村　哲（東北大学大学院理学研究科）

理工系のための力学

井口英雄・佐甲徳栄・相馬亘・中原明生共著，A5 判，308 頁，本体 2200 円，東京図書



力学の教科書には多くの名著と称されるものがある中で，大学の初年級を対象とした，受験参考書的ではなく，大学の教科書として力学の考え方を親切に説く本書は，その帯表紙にあるように，「“力学” の本音を語る授業の実況中継！」を試みて成功を収めているように思います．まえがきで示唆されているように，本書の内容は大学１年生にも理解可能な範囲の数学的知識を使う範囲に絞り込んであります．そのため標準的な教科書に比べて内容が少なくなってはいますが，その分重要な概念の説明にページを割いていて，初学者が力学を理解するための配慮がなされていると言えます．

以下に本書の構成を見ていきましょう．第０章では物理学や工学との関連で力学の位置づけが述べられています．また，これより後の各章末のコラムでは物理的な展望を述べるとともに，数学ノートという小節では数学概念の説明をしていますので，数学と物理学の共通の母体としての力学という位置づけにも配慮があると感じます．第１章は力学を始めるにあたって質点の運動の記述に必要となる速度，加速度の定義が述べられています．また，必要なベクトル演算も簡潔にまとめられています．第２章は，ニュートンの運動の３法則と万有引力の法則について述べられていて，ニュートンの『プリンキピア』からラテン語の原文を引用するなど工夫が見られます．特に地表付近の重力と万有引力の項目ではマクローリン展開と絡めて説明するところは実際の授業上での工夫でしょう．第３章では運動方程式の運用の例として，一様重力場での空気の抵抗を加味した質点の運動と，減衰を伴う振動子の運動を取り扱っています．特に，「音を立てずにドアを素早く閉めるには―減衰振動」の節は簡単な力学モデルが現実味を持って現れる場面を見せているし，強制振動の例では最新の地震の話題が取り上げられていて，モデルで現象を理解するための身近な例になっていると思います．第４章では，仕事とエネルギーが取り上げられています．数学的には線積分の概念が必要な個所ですが，大学１年生にも分かるように初等的な例題を交えて，線積分で表される仕事の概念が説明されています．第５章は極座標と回転運動とに充てられています．極座標系に付随した動標構（本書では基本ベクトル場と呼んでいる）についての数学ノートがあるため，極座標系での運動方程式の記述の説明がすっきりしたものになっています．また，（2×2 には限っているものの）回転行列を用いた説明のため，コリオリ力の説明が数学的にもすっきりとしています．つまり，多くの力学の教科書では採用されていましたが，初学者にはイメージの取りにくい回転の角速度ベクトルの物理的かつ直感的な導入を，本書では避けています．回転行列は線形代数の科目で普通に教えられていますし，コリオリ力の原理的説明には 2×2 回転行列で十分だと言えます．第６章では角運動量を取り扱っています．力のモーメントの導入は丁寧になされていて，その後の角運動量の定義と回転の運動方程式の記述に自然につながっています．ここでは前章で導入を見送った角速度ベクトルが定義されていますが，本書では回転を２次元平面内に限っているので，扱う運動方程式は１つの回転軸周りのものに限られています．第７章は２体問題を扱っています．質量中心，並進運動，相対運動という基本的な概念の導入後，惑星の運動と連成振動を論じています．惑星の運動方程式の解法は標準的なものですが，長い計算の中に埋没しがちな解にたどり着く道筋をフローチャートの形でまとめているのは，初学者への配慮だと思えます．連成振動の議論では，固有値，固有ベクトルを導入して，線形代数との関連に触れているのは初年度の理系科目の一体性を示すことにもなっています．第８章は質点系の一般論を述べています．第９章では剛体の力学を扱っていますが，具体例では固定軸を持った剛体の回転運動に限られています．本書では，大学１年生にとってはややこしい概念である慣性テンソルが導入されていませんので，仕方のないことですが，それでも具体例は回転運動の理解に大いに役立ちます．ゆでたまごと生たまご，どちらが早く斜面を転がり落ちるか．答えは本書で見て下さい．

なお，本書には若干のミスプリが見られますが，いずれも簡単に修正が可能なもので，学習上特に問題はないと思います．近々，正誤表が出版社の東京図書のホームページに掲載されますので参考にしてください．

岩井 敏洋（京都大学名誉教授）

BOOK REVIEW

なっとくする数学の証明



瀬山士郎著，A5 判，189 頁，本体 2700 円，講談社

「証明」と聞くだけでいやな思いをする人が多い．ユークリッド『原論』の伝統を受け継いだヨーロッパの数学と違って，漢字文化圏で発展した数学は数値計算に秀でていたこともあって，証明という考え方が定着しなかった．

「数学における証明」がどのようなものであり，どのような意味を持つかを解説する本書は，あらゆる手を尽くして証明の重要さを説いている．証明のためには前提とされる事実が必要となり，数学ではそれは公理と呼ばれる．公理から論理を使って導かれる命題の重要なものは定理と呼ばれる．また，数学を展開するために数学的な対象に名前をつける必要があり，それは定義と呼ばれる．したがって公理，定理，定義は互いに関連しあってはいるが，異なるものである．ただ，難しいのは，何を公理に選ぶかによって，定理も定義も変わってくることである．また，公理は絶対的な真理ではないことを第１章３節でユークリッドの５番目の公理（『原論』では公理といわずに公準といっている）とそれを否定した非ユークリッド幾何学の公理を述べることによって主張している．本書を読んでいきなりこうした主張に会うと，とまどう読者も多いかもしれないが，本書を通読すれば意味するところは自然に分かるように本書は構成されている．

学校数学で証明が難しく感じられる理由は漢字文化圏の伝統の問題以外に，初等幾何学以外では公理を提示するのが難しく，そのために何を前提にして証明するのか，考えるとますます分からなくなることにも起因している．

本書では証明に関して重要な指摘がたくさん記されている．その一例を挙げると

> 「証明は分かったけど，どうして？」という不思議な心理状態に陥ることがあります．つまり，証明は理解できる．だけどなんとなく気分が落ち着かないということです．(p.18)

数学の本を読んでいるとこうした心理状態に陥ることは普通にあることだが，著者はこれには二つの問題があることを指摘し，その対処法をあわせて記している．

第一の問題は「数学的な証明のメカニズムである記号の扱い」にある．証明は通常，計算や記号を変形することによって遂行され，計算や変形に習熟することやその過程を追っていくことは簡単にできても，計算の意味や変形の意味が分からないということである．

> それは記号の運用（俗に云う計算）ができれば数学ができるという，変形手続きだけを重要視し記号の意味を軽視，あるいは無視してしまった結果だと思います．(p.20)

と著者は記し，今日の日本での数学教育の問題点と直結していることを指摘している．

第二の問題は「納得するとはどういうことかという心理学的なこと」である．著者は小平邦彦の文章を引用し，小平が「分からない証明を繰り返しノートに写して暗記してしまうと何となく分かるようになり，それが数学の学び方である」と述べながら，一方「証明を暗記さえすればよいのではなく，ノートに繰り返し写しているうちに大脳の中で何かが起こって分かった！ということになる」と記している点に注目する．

> つまり，納得するという心理状態はとても個人的なことで，ある人が納得したのと同じ方法で私も納得できるわけではないし，私の説得の仕方であなたも納得できるわけでもないのです．記号操作が曖昧性を持たず，大勢の人が共有できるものなのに対して，意味の理解は共有しにくい．それはなぜかといえば，数学の意味は具体物ではなく抽象的なイメージに支えられることが多く，イメージとはすぐれて個人的なものだからです．(p.22)

著者は読者がイメージを描く手助けをすることしか「証明を納得させる」術はないと述べている．そのために，本書では手を変え品を変え，証明の本質が繰り返し説かれることとなる．

さらに著者は数学の証明の効用について次のように記している．

> 数学で学んだ証明の論理は，数学という場を離れて

も，あらゆる物事を適確に論理的に判断する大切な手段となります．確かに日常生活では，条件や状況などが曖昧なまま物事を判断しなければならないことが大部分です．最後には感覚的に判断しなければならないことも多いでしょう．しかし感覚的に判断する前に，きちんと論理的に判断し，最後の最後に自らの感性を信じて判断を下すということはとても大切なことです．(pp.27〜28)

第2章以下は証明に関して微に入り細に入り論じられる．第2章は論理に演繹論理，帰納論理，仮説論理という3つの姿があることが示される．演繹論理は三段論法がその典型であり，数学の証明で最も重要な役割をする．ただし，数学の場合「AならばBである」というのは全く曖昧さを持たないことが重要であるが，日常生活では「AならばBである」という主張にも曖昧さが潜んでいる場合がよくあるということが多くの例をあげて説明されている．

第2章では数学の証明で重要な役割をする背理法についてていねいに議論されており，数学的帰納法が正しいことを背理法を使って証明までしている．最後に記号論理学を援用して，これまでのこの章の議論をまとめている．

なお「素数が無限にある」ことの背理法による証明がユークリッド『原論』の証明として与えられているが (p.56)，これは著者（のみならず多くの数学者）の誤解である．『原論』の証明は $p_1, p_2, \ldots, p_n$ が相異なる素数とすると $N = p_1 p_2 \cdots p_n + 1$ は $p_1, p_2, \ldots, p_n$ では割り切れないので N の素因子として $p_1, p_2, \ldots, p_n$ 以外の新しい素数があるという論法である．

いささか内容が難しくなったと著者も考えたようで，第3章では一転して算数や中学校の数学を例にとって再度証明について考えている．計算も証明の一種であり，算数の文章題の解も一種の証明であることが指摘される．そして第4章で証明の花形として初等幾何学の証明の典型的な例がたくさんあげられ，ていねいに議論されている．この章を読むだけでも，数学教育の現代化運動の中で初等幾何学を捨て去った学校数学が，いかに大切なものを失ったかが理解されよう．こうした指摘に対して，いや中学校や高校でも初等幾何学はある，と反論する数学教育者がいるが，それに対しては公理を使って証明することを失った幾何学はその本来の教育目的を失なってしまっていると反論することができる．数学教育の現代化運動の中では学校教育で使われる初等幾何学の公理体系は不完全であるという理由がまかり通って初等幾何学の公理的な取り扱いが捨て去られた．しかし，それを主張するなら，高校数学で展開される微積分などは公理体系がないどころか，直観に基づいた中間値の定理の取り扱いなど不完全もいいところである．著者も評者と同じ考え方と思われ，第5章では微積分の基本となる実数の連続性とイプシロン・デルタ論法が紹介され，中間値の定理が証明されている．第6章は代数方程式を題材にとっているが実数の連続性の議論の続きであり，解析のみならず代数学の基本定理の証明に適用できることが示されている．

ここまで読めば証明とは何であるかに対してかなりはっきりしたイメージを読者は持つことができるであろう．最後のまとめは大変含蓄に富んでいる．著者の言葉を引用しよう．

> 証明とはある数学的な事実が「正しい」ことを確認する手続きです．
>
> 中略
>
> 逆に言えば，証明できた事柄はなんの条件もつけることなく万人にとっての真理として適用することになる．ここに数学の証明の持つ大きな威力があります．すべての人に，有無を言わさずに正しいということを「強要」してしまう数学の証明は，数学という学問の大きな魅力の一つですが，数学が嫌われてしまう理由の一つでもあります．(p.173)

しかしながら，数学の発見はもとより，問題をどのように解くかを発見する過程は非論理的なひらめきである場合が多い．その一方で，皆に納得してもらうためには証明が必要である．この不思議な連関が数学に対する誤解を増幅しているように思われる．著者は次の言葉で本書を締めくくっている．

> 数学記号はこの世界をよく知るために人が考え出した言葉の一つです．これほどうまく作られた人工言語はない，と言ってもいいかもしれません．言葉には意味があります．その意味を追いかけることが証明の本質的な部分だと私は考えます．読者の皆さんが数学の証明を，あたかもSFかミステリーを読むように楽しんで下さることを心から願っております．

本書を読み終えた後で再度第1章を読むと得るところが多いであろう．本書が多くの読者を持つことを願ってやまない．

上野　健爾（四日市大学関孝和数学研究所）

BOOK REVIEW

「数理科学」は語る

30年前から現代へのメッセージ

広田　良吾

1983年8月号

数式処理システムの REDUCE を使い続けてもう 40 年近くになる．1981 年に次の差分方程式を提出した[1)]．

$$[Z_1\, e^{D_1} + Z_2\, e^{D_2} + Z_3\, e^{D_3}]\tau \cdot \tau = 0.$$

この方程式は現在広田方程式と呼ばれている．この方程式はパラメータ Z_1, Z_2, Z_3 と双線形演算子 D_1, D_2, D_3 の適当な組合せによってその当時までに良く知られたソリトン方程式 KdV, Boussinesq, sine-Gordon, Benjamin–Ono, Toda, KP などを生成するマスター方程式である．この方程式の可積分性を証明するために 3–ソリトン解を求める必要に迫られた．

その当時 REDUCE を使うには大型コンピュータを使うしかなく，ユーザーに許されるメモリの最大値が 1 M バイト以下で（今では信じられない数値だ），使用料も年間 100 万円近くになっていた．

この方程式の解を求めるとき，一番苦労したのはメモリである．このため途中で何度プログラムを変更したか分からない．やっとの思いで，計算が終了し厳密な 3–ソリトン解が求まったときは感激した．

現在は無料の REDUCE（Free CSL version, 32bits）を使っている．これは Flash memory に入れてどこでも使える．試しに同じ計算をやってみたら 3 秒！で終了した．

この方程式は現在の用語で離散 KP 方程式系に属し[2)]，解は行列式を使って表現される．その後，筆者は解が行列式ではなくパフィアンを使って表現される離散 BKP 方程式系[2)]の研究に進んでいる．

ところが最近ザブロージン氏の解説[3)]を発見した．その中で彼は「古典可積分系」と「量子可積分系」との関係を熱く語っている．

“古典可積分系と量子可積分系との間にはその他にももっと深い，普通の対応原理からは決して導かれない可積分系特有の関係もある．正確に言うと古典的方程式が量子的問題に $\hbar \neq 0$ の場合でさえ正確にそのままの関係式として含まれていることが分かってきた.”



読んで気になったのは次の主張である．『量子可積分系におけるマスター T 作用素 $T(t_0, t_1, \cdots)$ が古典的広田方程式の解 τ 関数と同一視できる』

この主張は，筆者には次のように聞こえる．

『離散的 BKP 方程式の解である τ_{BKP} 関数に対応するものが量子可積分系に存在する』

参考文献

1) Hirota R., *J. Phys. Soc. Jpn.* **50** (1981) pp.3785–3791.
2) Miwa T., *Proc. Japan Acad. Ser. A. Math. Sci.* **58** (1982) pp.9–12.
3) A. ザブロージン・訳：武部尚志『可積分系における広田方程式と Bethe Ansatz』数理科学 2013 年 2 月号，pp.7–12.

（ひろた・りょうご，早稲田大学名誉教授）

臨時別冊・数理科学（SGC ライブラリ-93：for Senior & Graduate Courses）

超弦理論の応用

物理諸分野でのAdS/CFT双対性の使い方

夏梅　誠　著

超弦理論から生まれ，今や一般相対論，原子核物理，物性物理，非平衡統計力学などの関わる「現実世界」を解析するうえでも強力な方法になりつつある AdS/CFT 双対性の「応用」について大学院生や他分野の研究者向けに解説．著者が行った集中講義がもとになっており，初学者でも学びやすいような工夫がなされている．時宜をとらえた得難い一冊．

サイエンス社

情報幾何の新展開
脳と情報の数理科学
第24回

信号処理の情報幾何 (1)
主成分分析と独立成分分析

甘利 俊一

線形空間において，信号の基底を変えればその表現は変わる．例えば，時間の関数である信号 $x(t), 0 \leq t \leq 1$ を考えよう．これは時間を離散化すれば，ベクトル $\boldsymbol{x}$ で表せるが，フーリエ変換，ウェーブレット変換などによって基底が変わり，その表現が変わる．画像信号 $s(x, y)$ も同じでいろいろな表現があり，うまい表現を使うと情報圧縮符号化，画像修復などがやりやすい．

信号 $\boldsymbol{x}$ を相関のない成分に分解する主成分分析，独立な成分に分解する独立成分分析，正値（非負値）信号に分解する非負行列分解，さらに疎（スパース）信号に分解するスパース信号解析などの多くの手法を，2 回に分けて情報幾何の観点から調べる．

24.1 線形表現と分解：主成分分析

ベクトル信号 $\boldsymbol{s} = (s_1, \cdots, s_n)$ をもとに，ベクトル信号 $\boldsymbol{x} = (x_1, \cdots, x_m)$ が，次の線形変換で生成されたと考えよう．

$$\boldsymbol{x} = A\boldsymbol{s} + \boldsymbol{\varepsilon}. \tag{24.1}$$

A は $m \times n$ 行列で，$\boldsymbol{\varepsilon}$ は雑音項（これは無視するときもある）である．$m = n$ ならば A は正方行列である．今回は，主成分分析，独立成分分析の 2 つを扱う[1,2]．

確率変数 $\boldsymbol{x}$ が平均 0，分散行列 V_X の分布に従っているとしよう．平均は 0 でなくてもよいが，その際は原点をずらして 0 になるように補正しておく．このとき，$\boldsymbol{x}$ を縦ベクトルとすると，分散行列は

$$V_X = E\left[\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^T\right] \tag{24.2}$$

である．いま，直交変換 O を用いて $\boldsymbol{x}$ を $\boldsymbol{s} = O\boldsymbol{x}$ に変換する．$\boldsymbol{s}$ の分散行列は

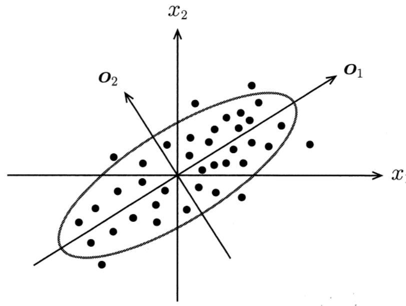


図 24.1　信号 $\boldsymbol{x}$ の分布と主成分方向 $\boldsymbol{o}_1, \boldsymbol{o}_2$.

$$V_S = E\left[\boldsymbol{s}\boldsymbol{s}^T\right] = OV_XO^T \tag{24.3}$$

であるから，これが対角行列になれば，$\boldsymbol{s}$ の成分は無相関である．いま，行列 V_X の固有値を大きい順に $\lambda_1 > \lambda_2 > \cdots > \lambda_n$ とし，対応する固有ベクトルを $\boldsymbol{o}_1, \cdots, \boldsymbol{o}_n$ とする．この固有ベクトルを横に並べて直交行列 $O = [\boldsymbol{o}_1 \cdots \boldsymbol{o}_n]$ を作ると，V_S は

$$V_S = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix} \tag{24.4}$$

のように対角行列になる（固有値が重複する場合は，この固有値に対応する固有ベクトルは一意に決まらず，対応する固有部分空間が定まるのみであるが，この問題にはここではふれない）．

このとき，$\boldsymbol{s}$ の各成分 s_i は無相関，$E\left[s_is_j\right] = 0\ (i \neq j)$ である．ガウス分布ならば，無相関であれば独立である．$\boldsymbol{s}$ の各成分の分布を見れば，固有値の大きい成分 s_1, s_2 などが幅広く分布していて，固有値の小さいものに対応する s_i は狭い．これを $\boldsymbol{x}$ で見れば，固有値の大きい $\boldsymbol{o}_1$ 方向（これを第 1 主成分と呼ぶ）に広く分布し，その次が第 2 主成分方向 $\boldsymbol{o}_2$ で，順に小さくなる（図 24.1）．

$$\boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^{n} s_i\boldsymbol{o}_i, \quad \tilde{\boldsymbol{x}} = \sum_{i=1}^{k} s_i\boldsymbol{o}_i \tag{24.5}$$

とすると，$\tilde{\boldsymbol{x}}$ は $\boldsymbol{x}$ で固有値の大きい順に k 個の成分を使い，あとは捨てたものである．すなわち k 個の固有ベクトル $\boldsymbol{o}_1, \cdots, \boldsymbol{o}_k$ の張る部分空間を考え，$\boldsymbol{x}$ をこの部分空間に射影する．こうしても，$\boldsymbol{x}$ と $\tilde{\boldsymbol{x}}$ とはそれほど違わないであろう．事実，余分の成分を捨てることによる誤差の大きさは

$$E\left[|\boldsymbol{x} - \tilde{\boldsymbol{x}}|\right]^2 = \sum_{i=k+1}^{n} \lambda_i \tag{24.6}$$

にすぎない．こうすれば‘無駄’な成分を切り捨て，$\boldsymbol{x}$ の低次元化に成功する．これが主成分分析の効能の一つである．

各成分のスケールを変えて，$s'_i = s_i/\sqrt{\lambda_i}$ としてみる．このとき，$\boldsymbol{s}'$ の分散行列は $V_{S'} = E\left[\boldsymbol{s}'\boldsymbol{s}'^T\right] = I$ となる（I は単位行列である）．これを信号 $\boldsymbol{x}$ の白色化と呼ぶ．この用語は，$\boldsymbol{x}$ が時間信号 $x(t)$ であったとき，これを線形変換

（線形のフィルターを通す）により，時間相関のない白色雑音にすることからきている．白色化した後で，信号 $\boldsymbol{s}'$ をさらに新しい直交変換 U を用いて $\boldsymbol{s}'' = U\boldsymbol{s}'$ と変換してみても，U は直交行列であるから $E\left[\boldsymbol{s}''\boldsymbol{s}''^T\right] = UIU^T = I$ であるので，$\boldsymbol{s}''$ の分散行列は I である．だから，信号のスケールが自由に選べるとすると，白色化は一意に決まらない．これは心理学などで問題になっていた，因子の回転不定性と呼ばれる問題である．この原因は信号のガウス性にある．ガウス信号では，無相関ならば独立であった．もし信号 $\boldsymbol{x}$ がガウス分布でなければ，無相関だけでなく独立性を要求することで，この問題が解決する．これが後に述べる独立成分分析である．

24.2 主成分分析と学習のダイナミックス

分散行列 V_X は多くの場合，観測された多数の $\boldsymbol{x}$，すなわち $\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_N$ から求める．経験分散行列

$$\hat{V}_X = \frac{1}{N}\sum \boldsymbol{x}_i^T \boldsymbol{x}_i \tag{24.7}$$

を作り，その固有値と固有ベクトルを求めて固有方向を定める．データ $\boldsymbol{x}_i$ が逐次的に与えられるときに，学習の手法を使ってもよい．第 1 主成分 $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{o}_1$ を学習により求めよう．これには，線形ニューロン $y = \boldsymbol{w} \cdot \boldsymbol{x}$ を考える．$\boldsymbol{w}$ を単位ベクトルとすれば，y は $\boldsymbol{x}$ を $\boldsymbol{w}$ に射影したものである．$\boldsymbol{x}$ を $y\boldsymbol{w}$ で近似するときの誤差である損失関数

$$L = \frac{1}{2}\left|\boldsymbol{x} - y\boldsymbol{w}\right|^2 \tag{24.8}$$

を最小にする $\boldsymbol{w}$ が第 1 主成分 $\boldsymbol{o}_1$ である．勾配法を用いて，$\Delta\boldsymbol{w} \propto -\nabla L(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{w})$ とし，$|\boldsymbol{w}|^2 = 1$ に注意して計算すれば，学習はデータ $\boldsymbol{x}(t)$ が入る毎に

$$\boldsymbol{w}(t+1) = \boldsymbol{w}(t) + y(t)\boldsymbol{x}(t) - y^2(t)\boldsymbol{w}(t) \tag{24.9}$$

とすればよい．これはニューロンの学習の一種であり，甘利が指摘し[3]，後に Oja によって基礎が築かれた[4]．

k 個の固有ベクトルの張る部分空間を直接に求めることもできる．いま，k 個の固有ベクトルを固有値の大きい順に並べてできる $n \times k$ 行列を $W(t) = [\boldsymbol{o}_1 \cdots \boldsymbol{o}_k]$ とする．これは，固有値の大きい k 個の固有ベクトルの張る k 次元の部分空間を定める．このとき，$y_i = \boldsymbol{o}_i \cdot \boldsymbol{x}$ と置けば，$\boldsymbol{x}$ をこの部分空間に射影したものは

$$\tilde{\boldsymbol{x}} = W(t)W(t)^T\boldsymbol{x} = \sum y_i \boldsymbol{o}_i \tag{24.10}$$

である．そこで，射影による切り捨て誤差

$$L(W(t)) = \frac{1}{2}E\left[\left|\boldsymbol{x} - W(t)W(t)^T\boldsymbol{x}\right|^2\right] \tag{24.11}$$

を最小にする k 個の固有ベクトルの張る部分空間 $W(t)$ を求めたい．前と同様

に L を $W(t)$ で微分すれば，勾配法による学習を連続時間で書いて，微分方程式

$$\dot{W}(t) = V_X W(t) - W(t)W(t)^T V_X W(t) \tag{24.12}$$

が得られる[5]．ここで，$\dot{W}(t) = (d/dt)W(t)$ である．この微分方程式を離散化し，学習の形に直せば

$$\boldsymbol{w}_i(t+1) = y_i(t)\boldsymbol{x}(t) - \sum_j y_j^2(t)\boldsymbol{w}_j(t), \quad i = 1, \cdots, k \tag{24.13}$$

となる．

方程式 (24.12) は，最大固有値に対応する k 個の固有ベクトルの張る部分空間 $W(t)$ に収束する．ただこれは最大固有値の部分空間を与えるが，各列が第 1 主成分 $\boldsymbol{o}_1$，第 2 主成分 $\boldsymbol{o}_2$，$\cdots$ を直接に与えるものではない．

$W(t)$ の各列を第 1 主成分から順に求めるアルゴリズムは，Xu によるちょっとした工夫で得られた[6]．そこでは $d_1 > d_2 > \cdots > d_k > 0$ なる対角成分を持つ対角行列 $D = \mathrm{diag}\,(d_i)$ を用い，(24.12) を

$$\dot{W}(t) = V_X W(t)D - W(t)DW(t)^T V_X W(t) \tag{24.14}$$

のように修正する．すると縮退がとけて，D の対角成分の大きさの順に，$W(t)$ の列が第 1 主成分から順に求まる．

最大ではなくて最小の固有値に対応する固有ベクトルが求めたいときもある．これは逆行列 V_X^{-1} の主成分である．V_X^{-1} の主成分を求めるには，(24.8) の L を最大にすれば良い．例えば第 1 最小成分 $\boldsymbol{o}_n$ を求めるには，$\partial L/\partial \boldsymbol{w}$ を最大にするのだから，(24.9) の $\Delta \boldsymbol{w}$ の符号を変えて学習すれば良さそうである．ところが，やってみるとうまくいかない．最小成分（k 個の最小成分の張る部分空間）を求める方法は謎であった．

k 個の直交する単位ベクトルからなる行列 $W(t)$ は，k 次元の部分空間とそれを張る正規直交基底を定める．このような行列の全体を $n \times k$ Stiefel 空間 $S_{n,k}$ と呼ぶ．これは $n \times k$ 行列の作る空間 $M_{n,k}$ の部分空間である．力学系の方程式 (24.12) は Stiefel 空間 $S_{n,k}$ 上で定義されるが，これは $M_{n,k}$ 上に拡大できる．$S_{n,k}$ 上の点に誤差が加わって $W(t)$ が $S_{n,k}$ からずれた場合，方程式 (24.12) のままでは，ずれが拡大していく恐れがある（図 24.2）．学習の場合はもとより，数値計算でも誤差は必ず現れる．

最大固有値の主成分を求めるアルゴリズム (24.12) または (24.14) は，実はずれを自動的に減らす．すなわち方程式 (24.12) を $M_{n,k}$ に拡大しても，その内部で $S_{n,k}$ は力学系の安定部分多様体であることが示せる．しかるに，符号を逆転した

$$\dot{W}(t) = -V_X W(t) + W(t)W(t)^T V_X W(t) \tag{24.15}$$

では，$M_{n,k}$ の中で $S_{n,k}$ は不安定部分多様体で，解軌道はここから離れていく．

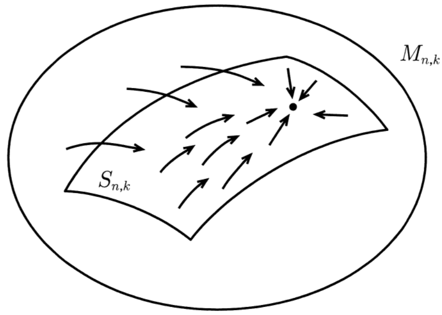


図 24.2　$n \times k$ 行列空間 $M_{n,k}$ の中で，力学系のフローが $S_{n,k}$ に流れ込めば $S_{n,k}$ は安定多様体となり，ここから出れば不安定となる．

主成分を求めるのに，(24.12) が安定であることは幸運だった．それならば主成分もしくは最小成分を求めるのに，$S_{n,k}$ に属する $W(t)$ の代わりに，$M_{n,k}$ に属する勝手な $n \times k$ 行列 $M(t) = [\boldsymbol{m}_1(t) \cdots \boldsymbol{m}_k(t)]$ を考えよう．ここで

$$\dot{M}(t) = V_X M(t)^T M(t) - M(t)M(t)^T V_X M(t), \tag{24.16}$$

$$\dot{M}(t) = -V_X M(t)^T M(t) + M(t)M(t)^T V_X M(t) \tag{24.17}$$

と置く．ここに (24.16) は V_X の主成分を求める方程式，(24.17) は最小成分を求める方程式である[7]．この方程式で，$M(t)$ を特異値分解すると

$$M(t) = W(t)DU \tag{24.18}$$

のように書ける．ここで $W(t) \in S_{n,k}, U$ は $k \times k$ 直交行列，D は対角行列で共に t によらない．従って $S_{n,k}$ 上で，この方程式を書けば

$$\dot{W}(t) = \pm \left\{ V_X W D - W D W^T V_X W \right\} \tag{24.19}$$

になっていることがわかる．D と U は方程式 $M(t)$ の不変量であるから，$M(t)$ の初期値を例えば $M(0) = \mathrm{diag}\,[d_i]$ から出発すればよい．

$n = k$ の場合，これは Brockett 流となり[8]，$f(M(t)) = \mathrm{tr}\left\{ M(t)M(t)^T V_X \right\}$ を損失関数とする勾配流になる．

24.3 独立成分分析

(24.1) 式において，信号 $\boldsymbol{s}$ の各成分は独立と想定し，$\boldsymbol{x}$ の各成分はそれらを線形結合で混合したものと考える．例えば，パーティ会場で何人かが話をしている．i 番目の人の信号を $s_i(t)$ とし，それらは独立とする．部屋にはマイクがいくつかあり，各人の話が混合して拾われる．j 番目のマイクが拾う信号は

$$x_j(t) = \sum A_{ji} s_i(t), \quad \boldsymbol{x}(t) = A\boldsymbol{s}(t) \tag{24.20}$$

で，混合の係数 A_{ji} は各人の場所とマイクの位置によって決まる（図 24.3）．これは未知である．このとき，混合した信号 $x_j(t), j = 1, \cdots, m$ だけを観測し

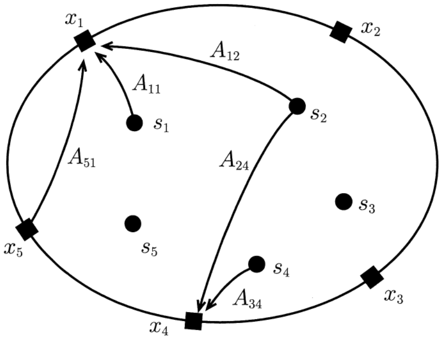


図 24.3　5 人の話者と 5 個のマイクロフォン．

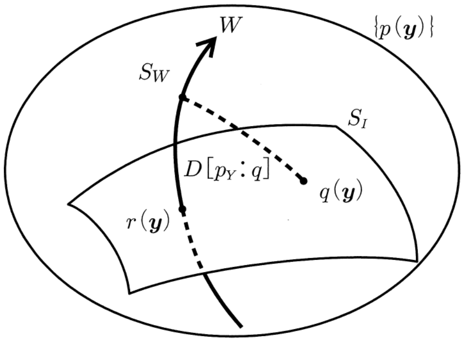


図 24.4　W による多様体 S_W と独立分布多様体 S_I は直交する．

て，各人の話 $s_i(t), i=1,\cdots,n$ が復元できるかという問題である．

いま簡単のため，$m=n$ とする．$m>n$ の場合は，主成分分析を行って $\boldsymbol{x}$ の次元を n に下げればよい．$m<n$ の場合は，スパース信号処理の工夫がいるので，次回に述べる．また，観測は離散時間で行われているとし，$t=1,2,\cdots,T$ は離散とする．正方行列 A は正則とし，その逆行列を A^{-1} とする．とりあえず，雑音項 $\boldsymbol{\varepsilon}$ はないものとする．

A が分かっていれば，$\boldsymbol{x}$ を

$$\boldsymbol{y}(t) = A^{-1}\boldsymbol{x}(t) \tag{24.21}$$

と変換すれば，$\boldsymbol{y}=\boldsymbol{s}$ となり，各成分が独立になる．そこで，W を適当に定め，各 $\boldsymbol{x}(t)$ を $\boldsymbol{y}(t)=W\boldsymbol{x}(t)$ と変換し，その成分が独立かどうかを判定する．$W=A^{-1}$ なら独立になる．独立でなければ独立に近づくように W を変えていけばよい．独立性をどう判定するか，ここから話を進めるが，その前に，不定性の話を少しだけ書いておかなければならないだろう．信号 $\boldsymbol{s}$ について，どの成分が 1 番目でどれが 2 番目か，その順番を入れ替えても，独立なものは独立のままである．また，各 s_i のスケールを勝手に変えても，それは独立のままである．したがって独立成分分析では，$\boldsymbol{y}=W\boldsymbol{x}$ によって独立なものが得られたとしても，その成分の順番は勝手だし，スケールもどうでもよい．だから独立性を回復する W には，これだけの不定性がある．

各 s_i の確率分布を $r_i(\boldsymbol{s})$ とする．これは未知である．また，話を簡単にするために $E[s_i]=0$ になるように原点を調整しておく．$\boldsymbol{s}$ の確率分布は

$$r(\boldsymbol{s}) = \prod r_i(s_i) \tag{24.22}$$

と積の形に書ける．勝手な W を用いて，(24.21) によって $\boldsymbol{y}$ を作ったとしよう．$\boldsymbol{y}$ の確率分布を $p_Y(\boldsymbol{y};W)$ と書くと，これは W に依存し，

$$p_Y(\boldsymbol{y};W) = |WA|^{-1} r\left(A^{-1}W^{-1}\boldsymbol{y}\right). \tag{24.23}$$

とくに，$W=A^{-1}$ のときは，$\boldsymbol{y}=\boldsymbol{s}$ で $\boldsymbol{y}$ の分布は $r(\boldsymbol{y})$ となり，独立な分布である．そこで，分布 $p_Y(\boldsymbol{y})$ から分布 $r(\boldsymbol{y})$ までの KL ダイバージェンスを用

いて，独立性からの乖離の度合とすればよい．しかし，r が未知であるという問題が残る．それならば，勝手な独立の分布

$$q(\boldsymbol{y}) = \prod q_i\left(y_i\right) \tag{24.24}$$

を選んで，$p_Y(\boldsymbol{y})$ から $q(\boldsymbol{y})$ までのダイバージェンス

$$D\left[p_Y : q\right] = \int p_Y(\boldsymbol{y}) \log \frac{p_Y(\boldsymbol{y})}{q(\boldsymbol{y})} d\boldsymbol{y} \tag{24.25}$$

を最小にする W を求めることにしてみよう．

ここで情報幾何が登場する．ベクトル $\boldsymbol{y}$ の確率分布からなる空間 $S = \{p(\boldsymbol{y})\}$ を考えよう．この中に独立な確率分布全体の作る空間

$$S_I = \left\{p(\boldsymbol{y}) \middle| p(\boldsymbol{y}) = \prod p_i\left(y_i\right),\ p_i \text{ は任意}\right\} \tag{24.26}$$

がある．$r(\boldsymbol{y})$ も $q(\boldsymbol{y})$ もここに含まれる．これは，e 平坦な部分多様体をなす．一方，W をパラメータとする $p_Y(\boldsymbol{y}, W)$ のなす多様体

$$S_W = \left\{p_Y(\boldsymbol{y}, W)\right\} \tag{24.27}$$

を考えると，これは平坦ではないが，分布 $r(\boldsymbol{y})$ で S_I と交わる．だから，$W = A^{-1}$ で，$D\left[p_Y(\boldsymbol{y}, W) : r(\boldsymbol{y})\right] = 0$ でこれは最小になる．ところで，$D\left[p_Y : q\right]$ はどうだろう．図 24.4 には，S_W と S_I とが直交するように書いてある．事実，両者は直交することが確かめられる．もし，S_W が m 平坦なら，ピタゴラスの定理によって，ダイバージェンス $D\left[p_Y : q\right]$ は，$q \in S_I$ が何であれ $W = A^{-1}$ で最小値を取るが，S_W は m 平坦ではないのでこうは都合良くいかない．しかし直交はしているのだから，$W = A^{-1}$ で極値を取る．ただ，極小のこともあるが，極大，もしくは鞍点かもしれない．それは q として何を取るかによる．q が r もしくは r に近ければ問題はない．もっと詳しくいうと，それは S_W の m 曲率に関係する．図 24.4 を参照されたい．

勾配法により W を変えていくのなら，現在の W_t を勾配法によって，

$$W_{t+1} = W_t - \varepsilon \frac{\partial}{\partial W} D\left[p_Y(\boldsymbol{y}) : q(\boldsymbol{y})\right] \tag{24.28}$$

と変えれば良い．$p_Y(\boldsymbol{y})$ から $q(\boldsymbol{y})$ への KL ダイバージェンスは

$$D_{KL}\left[p_Y(\boldsymbol{y}) : q(\boldsymbol{y})\right] = \int p_Y(\boldsymbol{y}) \log \frac{p_Y(\boldsymbol{y})}{q(\boldsymbol{y})} d\boldsymbol{y} \tag{24.29}$$

$$= -H(Y) - E\left[\log q(\boldsymbol{y})\right] \tag{24.30}$$

と書ける．$H(Y)$ は $\boldsymbol{y}$ のエントロピーで W の関数，$E\left[q(\boldsymbol{y})\right]$ は $q(\boldsymbol{y})$ の期待値である．$\boldsymbol{y} = W\boldsymbol{x}$ と変換した $\boldsymbol{y}$ のエントロピーは，$\boldsymbol{x}$ のエントロピー $H(X)$ を用いて

$$H(Y) = H(X) + \log |W| \tag{24.31}$$

と書ける．W を $W + dW$ に変えたときの $H(Y)$ の変化は

$$\log|W+dW|-\log|W|=\mathrm{tr}\left(dWW^{-1}\right) \tag{24.32}$$

のように計算できる．一方，$\log q(\boldsymbol{y})$ のほうは W の微小変化 dW に対して

$$d\log q_i(\boldsymbol{y})=\frac{q_i'(y_i)}{q_i(y_i)}dy_i \tag{24.33}$$

と書ける．ここで

$$\varphi_i(y_i)=\frac{-q_i'(y_i)}{q_i(y_i)} \tag{24.34}$$

と置く．さらに $d\boldsymbol{y}=(dW)\boldsymbol{x}$ を用いると，

$$d\log q(\boldsymbol{y})=-\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{y})^T dWW^{-1}\boldsymbol{y} \tag{24.35}$$

となる．

したがって，(24.29) の D_{KL} を減少させるオンライン学習は，損失関数を

$$l(\boldsymbol{y},W)=-H(Y)-\log q(\boldsymbol{y}) \tag{24.36}$$

と置いて

$$dl(\boldsymbol{y},W)=\mathrm{tr}\left(dWW^{-1}\right)+\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{y})^T dWW^{-1}\boldsymbol{y} \tag{24.37}$$

l を減らす方向に W を変えて行けばよい．W の変化を

$$dX=dWW^{-1} \tag{24.38}$$

で計ってみよう．こうすると，

$$dl=-\mathrm{tr}(dX)+\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{y})^T dX\boldsymbol{y} \tag{24.39}$$

が得られる．成分で書けば，l の dX 方向の微分（勾配）は dX を用いて

$$\frac{dl}{dX_{ij}}=-\delta_{ij}+\varphi_i(y_i)\,y_j \tag{24.40}$$

だから

$$\Delta X_{ij}=-\varepsilon\left(\delta_{ij}-\varphi_i(y_i)\,y_j\right),\quad \Delta X=-\varepsilon\left(I-\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{y})\boldsymbol{y}^T\right) \tag{24.41}$$

のように変えれば良い．これを (24.38) より W の変化に直せば，学習規則

$$\Delta W=-\varepsilon\left(I-\varphi(\boldsymbol{y})\boldsymbol{y}\right)W \tag{24.42}$$

が得られる．

ここで，損失関数 $l(W)$ を W で微分した勾配を用いるのでなく，$dX=dWW^{-1}$ に直して dX の変化で勾配を計算するトリックを用いた．正則行列 W の全体のなす空間 $Gl(n)$ の空間を考えたときに，点 W での微小変化 dW を相対変化 $dX=dWW^{-1}$ で計る*1)．また，dW の長さの自乗を dX に移して

*1)　dX は積分できない．すなわち $\int dWW^{-1}$ は積分経路に依存するから $X=\int dX$ のような X は W の関数として存在しない．このような量を非ホロノームという．

$$\langle dW, dW\rangle = \mathrm{tr}\,(dXdX) \tag{24.43}$$

で計る．これは $Gl(n)$ のリー群としての構造に適合したリーマン計量である．いま，W 点とその微小変化した $W+dW$ に，共に右から W^{-1} を掛けてみよう．これらは原点（単位行列）I とその微小変化 $I+dX$ に移る．原点での接ベクトル dX の計量を $\langle dX, dX\rangle = \mathrm{tr}\,(dX\,dX)$ で定義し，W 点の変化 dW の場合もこれを原点に移した dX の計量で定義する．これが，$Gl(n)$ の不変なリーマン計量（Killing 計量）である．ここでの学習法は，この計量を用いた自然勾配法になっている．

勾配法を用いる学習法は，Bell & Sejnowski が考案した[9]．しかし，自然勾配法ではないため，式が複雑であり，性能も劣っていた．自然勾配法は計算の手間から見ても優れている[10]．自然勾配学習法はリー群の不変性を基礎にするだけあって，数々の良い性質を持っている．例えば，W が何であっても，学習によらず，その収束の性質は一様である．なお，これ以外にもキュムラントを損失関数に用いるなど，多くのアルゴリズムが知られている[1,2]．しかし，いずれも W の勾配ではなく，dX を用いた自然勾配法にするのが良い．

24.4 推定関数とセミパラメトリックモデル

前節の KL ダイバージェンスによるアルゴリズムは分布 $r_i(\boldsymbol{s})$ が未知なので，勝手な独立分布 $q_i(y_i)$ を用いている．関数 $\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{y})$ は仮に選んだ $q_i\,(s_i)$ から (24.34) で出てくる．関数 $\boldsymbol{\varphi}$ の選び方によっては，アルゴリズムは真の $W = A^{-1}$ 収束しないことがある．実をいうと，真の r_i と仮に定めた q_i とで，4 次のキュムラントの符号が一致しないとおかしなことが起こるという観測がある．

そこで，独立成分分析を統計学の立場でより一般的に考える．観測データ $\boldsymbol{x}(1), \cdots, \boldsymbol{x}(T)$ は，確率分布

$$p\,(\boldsymbol{x}, W, r_i) = \prod_i r_i\left(\sum_i W_{ij}x_j\right) \tag{24.44}$$

に従うとして，ここから W（もしくはその逆行列）を推定する問題である．しかし，分布 (24.44) は未知の母数として W の他に n 個の関数 $r_1(s), \cdots, r_n(s)$ を含む．これは，前に論じたセミパラメトリック統計問題である．

これを解くのに推定関数行列 $F(\boldsymbol{x}, W)$ を考える．これは，真の W を用いて $\boldsymbol{x}$ の期待値をとったときに，

$$E_W\left[F\left(\boldsymbol{x}, W'\right)\right]\begin{cases} = 0, & W' = W, \\ \neq 0, & W' \neq W \end{cases} \tag{24.45}$$

を満たす関数である．ただし W の不定性より，$W' \neq W$ とは，$\boldsymbol{y} = W'\boldsymbol{x}$ では $\boldsymbol{y}$ が独立にならないことを意味するものとする．

情報幾何により推定関数を求めると，有効な推定関数の全体は，任意関数 $\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{y})$ を含む

$$F(\boldsymbol{x}, W) = F(\boldsymbol{y}) = I - \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{y})\boldsymbol{y}^T, \tag{24.46}$$

およびその線形変換で与えられることがわかる[11]．これ以外の推定関数はこれより効率が劣るから，これだけを考えれば良い．これを用いた推定は，推定方程式

$$\sum_{t=1}^{T} F(\boldsymbol{y}(t)) = \sum_{t=1}^{T} F\{W\boldsymbol{x}(t)\} = 0 \tag{24.47}$$

を解けばよい．

ここでは学習型の逐次的な推定を考え，

$$W_{t+1} = W_t - \varepsilon_t F(\boldsymbol{x}_t, W_t) \tag{24.48}$$

でデータ $\boldsymbol{x}_t = \boldsymbol{x}(t)$ が来るごとに W を更新する方式を考える．ところで，F が推定関数なら，それを線形に変換した

$$\tilde{F}(\boldsymbol{x}, W) = \boldsymbol{R}(W)F(\boldsymbol{x}, W) \tag{24.49}$$

も推定関数である．ここで，$\boldsymbol{R}$ は行列 F を $\boldsymbol{R}F$ に変換する W のみに依存する可逆な線形変換である．

一般的に $\boldsymbol{R}(W)$ は添字を 4 個持つ 4 階のテンソルで

$$\tilde{F}_{ij}(\boldsymbol{x}, W) = \sum_{k,l} R_{ijkl}F_{kl}(\boldsymbol{x}, W) \tag{24.50}$$

のように書ける．(24.48) と

$$W_{t+1} = W_t - \varepsilon_t \boldsymbol{R}(W)F \tag{24.51}$$

とでは，W_t が収束するならば，どちらも同じ真の W が答である．しかし，この 2 つは収束の速度と安定性で違いが現れる．逐次解を求めるのにニュートン法が収束の速度が速く，しかも局所的には安定である．ニュートン法で推定方程式を解くには，

$$\sum_t F(\boldsymbol{x}_t, W + \Delta W) = \sum F(\boldsymbol{x}_t, W) + \sum \frac{\partial F}{\partial W} \circ \Delta W = 0 \tag{24.52}$$

より，ΔW を求める．

学習は $\Delta X_t = \Delta W_t W_t^{-1}$ を用いて行うから，

$$K = E\left[\frac{\partial F}{\partial X}\right] = E\left[\frac{\partial F}{\partial W}\right] W^T \tag{24.53}$$

という演算子を導入すると，ニュートン法は

$$W_{t+1} = W_t - \varepsilon_t K^{-1}(W_t) F(\boldsymbol{y}_t) \tag{24.54}$$

である．これは $\boldsymbol{R}(W)$ として $K^{-1}(W)$ を用いるもので，定数 α, β により

$$\tilde{F} = I - \alpha\boldsymbol{\varphi}(y)\boldsymbol{y}^T + \beta\boldsymbol{y}\boldsymbol{\varphi}^T(\boldsymbol{y}) \tag{24.55}$$

となる．こうすれば，誤差の解析も可能で，収束の速度も解析的に求まる．詳しくは，文献を参照されたい[11]．

終わりの一言

今回は，主成分分析と独立成分分析について述べた．主成分分析は古くから研究が進んでいる．主成分の学習による獲得と，主成分の張る部分空間を得るための力学系の研究が進んだ．これは，ある評価関数の最小化の勾配流になる．それならば，最小成分についても同じ評価関数で，その最大化の勾配流で良さそうである．それができない．実は，これは行列の空間の中で，Steifel 多様体のなす部分空間の安定性によるものである．私のところを訪問中の Fudan 大学の Chen 教授と共にこれを解決したときはうれしかった．

独立成分分析は Poland からきた Cichocki 教授との仕事であり，私が東大を定年でやめて理研に移ってからで，60 歳を超えてもまだ研究はできると喜んだ．リーマン構造，とくに自然勾配を用いる方法を用いて，Bell–Sejinowski の方法を幾何を改良した．この分野で突破口を開いた Bell 氏は，初めて会ったときに，「君らの論文を読んで，悔しくて眠れなかった，どうしてあんな簡単なことを自分で考えつかなかったのだろうと」と述懐した．彼は私たちの方法を世界に宣伝してくれた．また，フランスの Cardoso 教授と昼食をとりながら話をして，セミパラメトリックモデルとして推定関数を用いる一般的な方法に行きついたのも楽しい思い出である．

参考文献

1) A. Cichocki and S. Amari, *Adaptive Blind Signal and Image Processing.* JohnWiley, 2002.
2) A. Hyvarinen, J. Karhunen and E. Oja, *Independent Component Analysis.* John Wiley, 2001.
3) S. Amari, Neural Theory of Association and Concept-Formation. *Biological Cybernetics*, **26**, 175–185, 1977.
4) E. Oja, A simplified neuron model as a principal component analyzer, *J. Mathematical Biology*, **15**, 267–273, 1982.
5) E. Oja, Principal components, minor components, and linearneural networks, *Neural Networks*, **5**, 927–935, 1992.
6) L. Xu, Least mean square error recognition principle for self-organizing neural nets, *Neural Networks*, **6**, 627–648, 1993.
7) T.P. Chen, S. Amari and Q. Lin, A unified algorithm for principal and minor components extraction, *Neural Networks*, **11, 3**, 385–390, 1998.
8) R. Brockett, Dynamical systems that sort lists, diagonalize matrices, and solve linear programming problems, *Linear Algebra and its Applications*, **146**, 79–91, 1991.
9) A.J. Bell and T. Sejnowski, An information maximization approach to blind separation and blind deconvolution, *Neural Computation*, **7**, 1129–1159, 1995.
10) S. Amari, A. Cichocki and H. Yang, A new learning algorithm for blind signal separation. In *Advances in Neural Information Processing Systems* (eds. M. Mozer *et al.*), **8**, 757–763, 1996.
11) S. Amari, J-F. Cardoso, Blind Source Separation — Semiparametric Statistical Approach, *IEEE Transactions on Signal Processing*, **45, 11**, 2692–2700, 1997.
12) J.-F. Cardoso and A. Souloumiac, Jacobi angles for simultaneous diagonalization, *SIAM J. on Mathematical Analysis and Applications*, **17**, 161–164, 1996.
13) S. Amari, Estimating Functions of Independent Component Analysis for Temporally Correlated Signals, *Neural Computation*, **12**, 2083–2107, 2000.

（あまり・しゅんいち，理化学研究所脳科学総合研究センター）

科学と社会 Science & Society

第14回 国家・学問・戦争の諸相

アインシュタインがやってきた

岡本 拓司

前回は，第一次大戦後の世界の科学界において発生したドイツ人排斥の動きと，これに対する日独の科学者の対応を取り上げた．今回は，大戦後においても世界中で歓迎を受けたドイツ人科学者——平和主義者のユダヤ人ではあるが——のアインシュタイン（Albert Einstein, 1879–1955）の来日（大正11年（1922年））を取り上げ，大戦後の日本の科学界の一側面を描くこととしたい．

14.1 第一次大戦後のアインシュタイン

第一次大戦後，戦勝国が設立した万国学術研究会議（International Research Council）から排斥されたドイツの科学者たちは，前回論じたとおり，科学研究におけるドイツの圧倒的な実力を誇示することによって自国の地位の維持に努め，むしろ排斥した側が困難を覚えるような状況を作り出そうとしていた．アインシュタインの名声が飛躍的に高まったのはちょうどその頃であった．

アインシュタインが生涯で最初に大きな成果を挙げたのは，科学史上に幾つかある「奇蹟の年」のうちの一つの1905年であり，光量子仮説，ブラウン運動に関する統計力学的な検討，（特殊）相対性理論（以後，相対論と略す）に関する論文がこの年に刊行された．ただし，後にアインシュタインの最も代表的な業績として知られることになる相対論の重要性が，物理学者の間で広く了解されるようになるのは1910年頃のことである．1910年にヨーロッパを視察した長岡半太郎（1865–1950）は，同地の物理学者たちが，時間・空間・質量に関する革命が起きたと騒いでいる様子について記し，日本人は今回の革命では力を振るうことができなかったが，次回は急先鋒となるよう期待したいと述べている[1)]．日本の物理学者としては，東京帝国大学を卒業した桑木彧雄（1878–1945）が留学中の1909年にアインシュタインを訪問しており，1911年頃から相対論の紹介を日本語で行うようになった[2)]．また，やはり東京帝国大学を卒業した石原純（1881–1947）も，1908年頃から相対論に関心をもつようになり，1909年からはドイツ語で関連の論文を発表していた[3)]．

特殊相対論もドイツ語圏で新聞記事になるといったことはあったが，アインシュタインの名前や相対論の語が，科学に関心のない人々の間でも世界規模で語られるようになるのは，1919年11月以降のことであった．アインシュタインは，互いに等速度運動をしている系の間の関係を取り上げた相対論を完成させたあと，加速度運動を取り扱えるより一般的な理論（一般相対論）の構築に進み，1915年から翌年にかけてこれを完成させた．な

お，等速度運動という特殊な場合を扱う方を特殊相対論と呼ぶようになったのは，より一般的な場合を扱う理論と対比してのことである．この一般相対論の重大な予言が，太陽のように大きな質量は，わずかではあるが近傍を通る光を偏向させ，これは日食の観測によって確認できるというものであった．

日食の観測は1919年5月にイギリスの2隊によって行われ，結果が一般相対論の正しさを示すことは，11月に王立協会と王立天文学会の合同集会で発表された[4)]．その後，『ロンドン・タイムズ』や『ニューヨーク・タイムズ』といった英語の一般紙で，相対論がニュートンの築いた時間・空間観を突き崩すものであり，かつ専門家にとっても難解な理論であることなどが喧伝され，アインシュタインは突如国際的な有名人となるに至る．

第一次大戦後，ドイツ人排斥の動きが生じた戦勝国にも，アインシュタインはたびたび招かれた．彼が自由を好む平和主義者であり，第一次大戦にも，ドイツ軍支持の表明で強く非難された「93人の声明」(1914年) にも，反対していたことも好意的に受け止められた．ドイツ政府は，彼の存在が，傾きかけた国家の威信を回復するために重要であることを理解しており，彼が，諸国において，スイス人やユダヤ人としてではなくドイツ人として受け入れられるよう努めた[5)]．アインシュタイン自身は同僚との結束を重視して外国訪問を断ることもあったが，やはりユダヤ人で外務大臣のラーテナウ (Walther Rathenau, 1867–1922) に，フランスとの外交関係改善のためにパリ訪問を促される (1920年) といった事態を通じて，自身の外国訪問がもつ意味を理解するようになった[6)]．

ドイツ国内には，しかし，上述の動きと並行して，反相対論を唱える勢力が勃興しつつあった．その実質は，大戦後の反ユダヤ主義的な風潮をうけて，ともかく高名な標的としてアインシュタインや相対論を攻撃するというものであったが，レーナルト (Philipp Eduard Anton von Lenard, 1862–1947) やシュタルク (Johannes Stark, 1874–1957) など一部の物理学者は，これを学問の性格に関わる議論に組み込んで，高度に数学的な理論である量子論や相対論を，「ドイツ科学」(Deutsche Physik) の理想から外れたユダヤ的退廃であるとする非難を先導した[7)]．

反ユダヤ主義に与しないプランク (Max Karl Ernst Ludwig Planck, 1858–1947) などの物理学者は，科学外の要素に由来する相対論への攻撃を嫌悪し，1920年9月には，議論を学問の枠内に収めるべく，アインシュタインとレーナルトが公的に対決する場を設けた[8)]．そこでは，両者の対立は物理学を抽象的なものとみなすか直観的であるべきとするかという趣味の問題に帰結するというおおよその了解が得られたが，その後も相対論への非難が止むことはなかった[9)]．

ベルリン・アカデミーの運営に責任をもつプランクや，ドイツの外務省は，アインシュタインがベルリンを離れるのではないかと惧れ，彼を引きとめるべく腐心した．しかし，1922年6月，ラーテナウが暗殺されると，次の標的となるユダヤ人はアインシュタインであるという想像に，当人も周囲も悩まされることとなった．それ以前の1921年から，アインシュタインは，シオニズム運動の一環として，また他国から排斥されているドイツの同僚の地位向上のため，英米 (1921年)，仏 (1922年) を訪問していたが，1922年後半には，ドイツを離れることの必要性が，以前より強く感じられていたようにも思われる．

14.2 日本への招待

アインシュタインや相対論が広く知られるに至ったからといっても，それがただちに物理学者の間で順調に受け入れられたことを意味したわけではなかった．特殊相対論は光という波動を伝える媒質として想定されてきたエーテルを無用のものであるとし，また光の速度は光源の運動によらず一定であるという前提の下に展開されていたが，欧米には，エーテルの実在を想定する者も，光速度が一定でないことを示す実験が可能であると考える者も，無視できないほどには存在し，第二次大戦

後に至っても相対論への反論が提示された[10]．これに対し，日本では，わずかな例を除いて相対論への強い反論は見られなかった．19世紀末になって世界の科学界に進出していった日本の科学者たちは，相対論への反論の主柱となるような，科学の枠内で取り扱い得る自然観——例えばニュートン力学に基づくもの——をそれほど強く信奉していなかったからであるとも説明できようが，すでに紹介した長岡の反応から読み取れる，科学理論全般への反応の仕方にも理由が求められるようにも思われる．

長岡は，1910年に見聞した，量子論と相対論の衝撃に揺れる欧州の物理学界を，幕末の日本で議論が沸騰した様子に喩え，ここで最終的に権力を掌握するのが誰であるのか（「中原の鹿は誰の手に落つべきか」）に強い関心を寄せていた．その上で，「中原の鹿」を追う者の中に日本人の影がないのを嘆き，若い世代を叱咤激励する文章を発表した[11]．長岡は，欧米であれば古典物理学の自然観に依拠して新たな理論（量子論・相対論）に疑義を呈することが自然であるような世代に属するが，その人物が，新たな物理理論への挑戦を功名争いの場と看做して若者をけしかけているのである．

日本では，長岡の世代が研究に志す決意を固めた頃，科学は必ずしも自然観彫琢の事業としてではなく，むしろ白人を相手に戦う知的競争の舞台として受け入れられた．続く世代では競争意識は希薄になっていくが，それでも，新奇な理論である相対論が現れた際には，長岡世代の後押しもあって，いったんこれを疑って吟味してみることよりも，先陣争いに遅れをとらないことが優先されたように思われる．

アインシュタインの招聘計画が持ち上がった際も，長岡は，これが宣伝に使われる可能性を懸念しつつも，偉大な科学者の訪問が日本の学界を鼓舞することの意義を認めて，協力を約束した．アインシュタイン招聘を企図したのは，賀川豊彦（1888–1960）の『死線を越えて』（大正9年（1920年））の出版で大成功を収め，そこで得られた利益で何を行うかを検討していた改造社の山本實彦（1885–1952）である[12]．山本は，哲学者の西田幾多郎（1870–1945）からアインシュタインについて聞き，次いで専門家の石原や長岡の意見を求めたところ，招聘に協力するとの約束が得られた（大正9年秋）．さらに翌大正10年（1921年）夏，やはり山本らが日本に招待した哲学者のラッセル（Bertrand Arthur William Russell, 1872–1970）に，現存する世界の三偉人は誰かと尋ねたところ，「一にアインシュタイン，二にレーニン，あとはいない」という答が返ってきた[13]．

改造社の出版物の傾向から言えば二番目の偉人の招待が相応しいように思われるが，諸般の事情でこれは難しい．むしろ一番目ならば見込みがある．具体的な招聘の交渉に石原や哲学者の田辺元（1885–1962）らが協力した結果，大正11年3月には，アインシュタインも日本での講演旅行に赴く旨を石原宛に伝えるに至った．その頃，ベルリンはアインシュタインにとって居心地のよい場所ではなくなりつつあったが，その状況は，既述の通り，彼が来日を決意したのち，ラーテナウの暗殺でさらに悪化していった．

14.3 アインシュタインのノーベル賞受賞

1922年10月にマルセイユを出発したアインシュタインは，コロンボ，シンガポールを経て，11月10日には香港に到着した．さらに上海に向う船の上で，後の途行きをにぎわせることになる知らせが舞い込んだ．受賞者決定が延期されていた1921年度のノーベル物理学賞が，「理論物理学への貢献，特に光電効果の法則の発見」という理由で，アインシュタインに授与されるというのである．これにより，上海でも，続いて上陸した日本でも，アインシュタインの歓迎には受賞への祝辞が伴うこととなった．

1919年11月以降のアインシュタインの名声を考えれば，1922年に至っての受賞はやや遅いようにも思われる．また受賞理由が相対論に言及していないのも奇妙である．受賞の時期や理由は，ノーベル委員会やスウェーデン王立科学アカデミーが

アインシュタインへの受賞を決意するまでの紆余曲折や，当時の物理学界の相対論への評価の複雑さを反映していた．

ノーベル賞は，実験研究への授賞が多く，純粋な理論研究に対しては，実験によって正しさが示された場合に授賞が決定される．こうした授賞傾向は，ノーベル賞の選考全般が科学界全体の評価を保守的に反映する（科学界の評価を，後追いはするが先取りはしない）という性格が強いことを考えれば，科学全体の特徴を反映したものであるともいえる．ある実験の結果が特定の理論の正しさを示すと理解される場合でも，個別の実験の結果が理論全体の証拠となり得る場合は少なく，また驚くべき実験結果が得られた場合にも，理論による解釈には一定の幅があることも多い．この事情はむしろ実験研究への評価を難しくするようにも思われるが，実際には，実験の場合には，解釈はどうあれ，多くの人々による追試で結果を確立することができる．確立された実験結果によっても成否の判断に困難が伴う理論のほうに，評価の困難がつきまとうのである．

物理学が理論科学としての色彩を強める以前の伝統の中にあったといえる，第一次大戦前のノーベル物理学賞の選考では，明らかに理論研究に授賞されたといえる例は，1902年のローレンツ（Hendrik Antoon Lorentz, 1853–1928）へのものがあるのみである．これも，賞を分けたゼーマン（Pieter Zeeman, 1865–1943）の成果に理論的な説明を与えたことが受賞理由であった[14]．

第一次大戦後，スウェーデンの科学界ではドイツに同情する傾向が強かったこともあり，ドイツの科学界の良心とも言える存在であったプランクへの授賞が検討された．しかし，この時点でも，スウェーデンの実験物理学者には量子論の正しさを疑う者が多く，プランクを推す報告書を書いたアレニウス（Svante August Arrhenius, 1859–1927）は，プランクの理論の正しさよりも，彼が研究を刺激する役割を果たしたことを指摘するといった工夫を凝らさなければならなかった．1919年に，保留されていた1918年の物理学賞をプランクが，1919年の賞をシュタルクが受賞したが，後者が量子論に否定的であることはノーベル委員会にとっては好意的に受け止められていた[15]．

アインシュタインは，1910年から，1911年と1915年を除いて毎年ノーベル賞への推薦を受けており[16]，1920年（この年の推薦には1919年11月の日食観測の結果の発表が影響した）には，ローレンツ，ゼーマン，オネス（Heike Kamerlingh Onnes, 1853–1926）などのノーベル賞受賞者を含む人々が彼を推した．しかし，レーナルトらの見解に影響されたノーベル委員会は，イギリスで発表された日食観測の結果は大きな誤差を含んでいる可能性があるとし，また理論研究への授賞に慎重な既述の伝統もあって，相対論には否定的な態度をとった．1920年の物理学賞は，引退間近な委員の一人の労をねぎらう意味を込めて，推薦者も少なく知名度も低いギヨーム（Charles Eduard Guillaume, 1861–1938）に与えられた[17]．

アインシュタインへの推薦は，1921年にはさらに増えた．戦勝国のドイツ排斥が厳しさを増していたが，彼は英米仏の物理学者たちからも推薦を受けている．反面，同国人のレーナルトは，自身と同じく反相対論を唱えるゲールケ（Ernst Gehrcke, 1878–1960）を推薦していた．国籍のみを見れば，戦勝国がドイツ人に栄誉を与えようとしているのに対し，同国人がこれを妨げようとしている恰好である（ただしプランクなどはアインシュタインを推薦した）[18]．

一方，ノーベル委員会は依然として相対論には冷淡であった．1921年の物理学賞に関する推薦者32人のうち14人が名前を挙げていたにもかかわらず，アインシュタインの受賞は実現せず――推薦は投票ではないにせよ――，受賞者決定は翌年に持ち越された．推薦の内実はもちろん当時の人々は知る由もなかったが，ノーベル賞の選考・授賞団体が2年続けてとったアインシュタインへの姿勢は明らかである．この時期，ニュートン（Isaac Newton, 1642–1727）のそれに匹敵すると称された偉業を無視したことにより，創設から20年を経たノーベル賞の権威は失墜しようとしていた[19]．

ちょうどこのとき，ノーベル賞の理論研究への態度に危機感を覚えていた物理学者が，選考に深く関わり始めていた．理論物理学者のウセーン（Carl Wilhelm Oseen, 1879–1944）が，1921 年 4 月にアカデミー会員となったのち，翌年 5 月に欠員の生じたノーベル委員会の委員に就任したのである．ウセーンは，1920 年以来ノーベル物理学賞が危機にさらされていることを感じ取っていたが，一方で相対論を理由とするアインシュタインへの授賞が困難であるのも理解していた．そこで彼は，1921 年と翌年にアインシュタインを推薦した際，光電効果の法則の発見を業績として挙げることで，この困難の回避を試みた[20]．

アインシュタインが 1905 年に発表した光電効果の法則は，1916 年までにミリカン（Robert Andrews Millikan, 1868–1953）によって確認されていた．光電効果の法則は，光量子仮説というより包括的な理論の一部に過ぎなかったが，光のエネルギーや運動量を量子的に扱い得るとする光量子仮説は，相対論よりも強い反発を招いていた．ウセーンは，危険な論争を巻き起こしかねない部分を避け，実験的確証の得られている安全な部分を取り出して，推薦理由に挙げたのである．

ウセーンの構想には，隣国の理論物理学者で，同時期，量子論的な原子模型の提唱によってノーベル賞に推薦されることの多くなっていたボーア（Niels Henrik David Bohr, 1885–1962）への授賞も含まれていた．1922 年の賞に関して行われたボーアの業績の評価においては，彼の原子模型は，実験的検証の得られている光電効果の法則に基づいており，物理的実在に関わりを持たない単なる思弁とは異なることが指摘された[21]．

ウセーンの工夫は功を奏した．相対論も光量子仮説も現れない評価には反対の声は上がらず，1922 年に，保留されていた 1921 年のノーベル物理学賞がアインシュタインに，1922 年の賞がボーアに与えられることとなった．量子論や相対論への懐疑はあっても，プランクに続いてこの両者が受賞することの意義は，授賞側も認めざるを得なかったのであろう．ノーベル賞と理論物理学の関係はここで一気に変化したが，その背景には，受賞に値する業績を，アインシュタインという一人の人間が，いくつも——実際のところ同じ年に——挙げていたという奇蹟のような出来事があった．

もっとも，アインシュタイン自身は，日食観測の結果が分かる以前にすでに受賞を予期していたのであろうか，1919 年 1 月に最初の妻ミレーヴァ・マリチ（Милева Марић, 1875–1948）と離婚した際には，ノーベル賞受賞の際には賞金は彼女に与えることを約束している[22]．また，彼自身が，自分の挙げた成果のうちで何を最も高く評価していたかも自明のように思われる．訪日中で受賞式に出席できなかった彼が，1923 年 7 月にスウェーデンのイェテボリで行った講演（正式ではないが受賞講演に相当すると考えてよいであろう）の主題は，当然のごとく相対論であった．

14.4 俗流「相対性」

大正 11 年 11 月 17 日に神戸に到着したアインシュタインは，12 月 29 日に門司から出る船で日本を離れるまでの間，訪れる先々で歓迎を受け，文字通り一挙手一投足が新聞等で報じられた．著名な科学者の来日としては，アインシュタイン以前には明治 41 年（1908 年）のコッホ（Heinrich Hermann Robert Koch, 1843–1910）のもの，以後では昭和 12 年（1937 年）のボーアのものなどがあるが，いずれも科学界の内部で話題となった程度であって，熱狂的な歓迎が社会現象ともなったアインシュタインの来日には比べるべくもない．

アインシュタインの名声が 1919 年 11 月以降急速に高まったのは世界的な現象であり，日本での歓迎もその一例として理解できるともいえるが，一方で，第一次大戦後に五大国の一つとなり，科学においても，鈴木梅太郎（1872–1943）によるオリザニンの発見（1910 年），本多光太郎（1870–1953）による金属学・磁性の研究，山極勝三郎（1863–1930）の人工癌の発生（1915 年）など，国際的な水準に達する研究を生んでいた日本の状況も影響していたと思われる．世界の科学の最先端がただ仰ぎ見

るのみの対象ではなくなりつつあったところへ，物理学界の英雄を間近に見る機会が与えられたことが，アインシュタイン歓迎に拍車をかけたと理解することができよう．

アインシュタイン・ブームを盛り上げる日本独特の要素は，他にも存在していた．大正 11 年に流行した 17 の出来事を記した岡本一平（1886–1948）は，「親鸞」，「ダンス」などとともに「アインスタイン」を取り上げ，「判らぬ，判らぬといいながら，男女相対の研究か，石原純の恋愛事件によってか，流布」と解説している[23]．「相対」（あいたい）とは，元来，一対一で差し向かいになることを意味し，「相対死」（あいたいじに）は徳川時代は心中を意味した．また第一次大戦後の日本では，性を科学的・医学的に扱った解説記事が人々の関心を広く集めており，改造社の『改造』や『女性改造』においても取り上げられていた．「相対性」という語には，一般の人々の想像力をかきたてる要素が多分に含まれていたのである．

高尚めいた学問的話題が男女間のやりとりの小道具に使われることはいつの時代にもありそうであるが，相対論は特に使い勝手がよかったようである．ピアニストの澤田柳吉（1886–1936）の大正 11 年の詩，「墓に行く男女」[24]には，以下のような一節がある．

時間といふ事がまだよく解りませんの，／時間といふのは時計のことさ，／では空間ともうしますと ？／其れも結局時計のことさ，／では時計はつまり時間なのね ？／さうだよ／同時に時計はつまり空間なのね ？／よく理窟を云ふね，それは違ふよ／それでは空間と申しますと ？／空間といふのは即ち「空」と「間」だ／なんだかさっぱりわからないわ ！／わからない ？

相対論が時間・空間概念の変革をもたらしたことを話題にしているようであるが，このあとに「痛い ！ 痛い！ いたいわよ／歯のあとがこんなについたぢやないの ！」と続き，いったい何をしているのかと思わせておいて，「つまり貴女の頬を「くうとかんだ」」とおちがつく．アインスタインを「愛したいん」だと読ませるといった，よく使われた洒落も詩の中に含まれている．同じ革新的な物理理論でも，量子力学ではこうは行かなかったように思われるのはなぜであろうか．

さらに，岡本の言及する「石原純の恋愛事件」は，「相対性」に想像以上の実質があるかのごとく思わせる出来事であった．日本における相対論研究の先導者であった石原は，アララギ派の歌人としても活動していたが，やはりアララギ派の歌人であった原阿佐緒（1888–1969）と知り合い，大正 7 年（1918 年）頃には，妻子もある東北帝国大学教授の身でありながら，原を恋愛の対象と考えるようになっていた．大正 8 年（1919 年）に帝国学士院恩賜賞を受賞したことが，石原に何らかの自信を抱かせるに至ったのかもしれない．拒む原の許をしきりに訪れる様子は，近所の子供に「ハゲアタマノセンセ，ツキヨノバンニ，イチニサン」とはやしたてられるほどであった[25]．

原は石原の想いを逸らそうと努力したが，絶望した石原が自殺未遂を起こすなどの事態に至ったために諦め，大正 10 年にはともに千葉で暮らすようになった．この出来事は新聞で広く報道され，原のために東北帝大教授の職をなげうった（当初は休職）石原の名は全国に知られるようになった．ウェーバー（Max Weber, 1864–1920）の場合と違って，石原の愛人は妻公認ではなく，石原によれば，眠っている石原を彼女が刺し殺そうとしたこともあったという[26]．

大学教授の職を離れ，物理学研究から遠ざかった石原は，アインシュタイン来日がとりざたされる頃から，相対論の解説書を書き始め，科学ジャーナリストとしての道を歩むこととなった．ドイツ語の能力に優れ，物理学の専門家でもあったために，滞日中のアインシュタインの通訳を務めてもいる．石原の幸運は，本人としては不本意であったかもしれないが，大学を離れた直後に，アインシュタイン・ブームの中で相対論の解説本が商業的にも成功を収めた点にある．また一方で，アインシュタインについてまわっている和服の人物が，恋のために地位も学問も妻子も捨てたあの石原で

あるという事実が，相対論や物理学への関心をいっそう高めたとも思われる．

14.5 土井不曇の反相対論

相対論への世間的な関心を高めた事情としては，アインシュタイン来日以前から，東京帝国大学の大学院生にして第一高等学校講師の土井不曇（どいうずみ，1895–1945）が反相対論を発表しており，師や先輩の物理学者たちと問題を起こしていたことも挙げられるであろう[27]．

相対論への反論自体は，既述の通り，欧米では少なからぬ数の物理学者が唱えていた．土井のそれも，相対論の「光速度一定の原理」（光は光源の運動によらず一定の速度で伝搬する）が，光がエーテルという媒質を伝わる波であるとする「光エーテル仮説」に依拠しているかのように解釈できる一方で，アインシュタイン自身はエーテルを不要のものであると断じているという，一見したところの不可解さに由来する反論であり，同系統の主張はアメリカなどでも発表されていた．土井は，東京帝大の理論物理学科在学時の大正8年から，具体的には，光速度一定の原理を否定するという方向で研究を進めていた．

研究の過程で，土井は，同じ分野の先達である石原にも自身の論文を送り，また石原は土井が学会誌に投稿した論文の査読も行っていた．しかし土井は，大正10年に石原と原の事件が新聞記事となったあとは，持ち前の潔癖症から石原の注意を受け付けなくなり，同じ分野の研究者と意見を交わしながら研究を進めるという機会を失っていくこととなった．同様の態度は，やはり年長の理論研究者，愛知敬一（1880–1923）に対しても取られた．同世代の物理学者の友人に菊池泰二（1893–1921）がいたが，土井も研究生として所属した理化学研究所（理研）からイギリスに派遣され，大正10年にそこで客死した．理研にはもう一人，やはり研究仲間の仁科芳雄（1890–1951）がいたが，仁科は菊池に代ってイギリスに派遣された．こうして土井は，相対論の打倒という大きな期待ばかりが先行する研究を，忌憚なく意見を交わせる仲間もないまま，孤絶した環境で進めていくことになる．

土井の指導教員は長岡であった．長岡は土井の構想に理解を示すそぶりも見せたが，石原らの専門家がこれを認めないことを知ると，次第に土井を疎ましく思い始め，大正10年10月上旬に翌年のアインシュタイン来日が報じられるようになってからは，土井に反相対論研究をやめるようしばしば働きかけるようになった．長岡が科学研究において目指したのは，西洋人に対して知的競争を挑むことであったが，一方では，欧米で広く認められている権威に対し無謀な攻撃を仕掛けて失敗するという，「国辱」（この語は長岡の発言の一部として新聞紙面に現れた）とさえ評し得る事態は，なんとしても避けたかったのである．土井は，長岡の要望を容れ，大正11年10月頃からは発言を控えるようになったが，新聞等では，アインシュタイン来日への人々の関心が高まるにつれ，若き学徒の果敢な挑戦や師弟間の確執といった話題が，しばしば取り上げられることとなった．

アインシュタイン来日から13年後に，寺田寅彦（1878–1935）が当時の様子を記した文章[28]があるが，そこには，大物理学者に影のように付き添う「学界の長老たち」の姿が描かれている．集会の席でも「護衛兵」の役割を果たしているようであり，「自分らのような弱輩のものがこの碩学に近づいて何か話でもしようと思うと，その護衛のかたがたの中には急に眼を見張りあるいは眉を顰めてその近よるものが何を言い出すかといったような緊張と不安の表情を正直に露出する人もあった」という．寺田は，弱輩者が突拍子もない質問などしては失礼にもなり日本の学界の恥辱にもなるとして一応の理解を示しているが，こうした「監察官」たちを「学界警察」と名付けて揶揄しているようでもある．いずれにしても，科学上の議論が国家や民族の栄誉のかかった真剣勝負であった長岡の世代の緊張感と，後の世代がそれをどのように見ていたかがよく理解できる観察である．

長岡の憂慮をよそに，日本上陸直後からアインシュタイン自身が土井との対話を望んだために，

これを長岡が土井に伝えて，両者の直接対決は実現した．ただし，土井のドイツ語は不十分であり，ドイツ語にも物理学にも通じていた石原は従前の経緯もあってか協力しようとせず，最後は土井の「いやあ」という発言がドイツ語の “Ja” と取り違えられ，話は混線したままで結末を迎えたようである．新聞には土井が反相対論を取り下げた旨が報じられたが，実際にはその後も土井の研究の方向性に大きな変化はなく，昭和 15 年（1940 年）に至っても，相対論に対する「濃厚なる疑惑」を表明している[29]．

相対論に日本中が沸いた時期，これとしばしば混同された科学理論に「神経伝導不減衰説」があり，茶人の高橋箒庵（1861–1937）はアインシュタインを「不減衰相対性原理」の発見者であると記している[30]．神経伝導不減衰説にも，長岡と土井の間に生じたような，師弟間の，西洋と日本の関わりにも触れる対立が発生しており，これが相対論との混同をより招きやすくしたようである．次回はこの神経伝導不減衰説を取り上げる．

参考文献

1) 板倉聖宣・木村東作・八木江里『長岡半太郎伝』，朝日新聞社，1973 年，374–375 ページ．
2) 金子務，『アインシュタイン・ショック II』，岩波現代文庫，2005 年，62–70 ページ．
3) 西尾成子，『科学ジャーナリズムの先駆者　評伝　石原純』，岩波書店，2011 年，79–88 ページ．
4) アブラハム・パイス，西島和彦監訳，金子務・岡村浩・太田忠之・中澤宣也訳，『神は老獪にして…』，産業図書，1987 年，398–401 ページ．
5) Paul Forman, “Scientific Internationalism and the Weimar Physicists: The Ideology and Its manipulation in Germany after World War I,” *Isis*, **64** (1973), pp.150–180.
6) ジョン・L. ハイルブロン，村岡晋一訳，『マックス・プランクの生涯』，法政大学出版局，2000 年，121 ページ．
7) ハイルブロン，前掲[6]，『マックス・プランクの生涯』，119–127 ページ．
8) ハイルブロン，前掲[6]，『マックス・プランクの生涯』，122–123 ページ．
9) 金子務，『アインシュタイン・ショック I』，岩波現代文庫，2005 年，73–75 ページ．
10) Stanley Goldberg, *Understanding Relativity: Origin and Impact of a Scientific Revolution* (Boston, Basel, Stuttgart: Birkhäuser, 1984); Thomas F. Glick, ed., *The Comparative Reception of Relativity* (Boston Studies in the Philosophy of Science; 103) (Dordrecht, Boston, Lancaster, Tokyo: D. Reidel, 1987).
11) 板倉他，前掲[1]，『長岡半太郎伝』，374–375 ページ．
12) 改造社関係資料研究会編，『光芒の大正　川内まごころ文学館蔵山本實彦関係書簡集』，思文閣出版，2009 年．
13) 金子，前掲[9]，『アインシュタイン・ショック I』，85–144 ページ．
14) Robert Marc Friedman, *The Politics of Excellence: Behind the Nobel Prize in Science* (New York: Henry Holt, 2001), p.47.
15) Friedman, *op. cit.*,14), *The Politics of Excellence*, pp.110–111.
16) アブラハム・パイス，村上陽一郎・板垣良一訳，『アインシュタインここに生きる』，産業図書，2001 年，91–112 ページ．
17) Friedman, *op. cit.*,14), *The Politics of Excellence*, pp.126–129.
18) パイス，前掲[16]，『アインシュタインここに生きる』，104 ページ．
19) Friedman, *op. cit.*,14), *The Politics of Excellence*, pp.129–133.
20) Finn Aaserud, “I Know How Little I Have Deserved This...,” in Henry Nielsen and Keld Nielsen, eds., *Neighbouring Nobel: The History of Thirteen Danish Nobel Prizes* (Aarhus: Aarhus University Press, 2001), pp.272–312.
21) Friedman, *op. cit.*,14), *The Politics of Excellence*, pp.136–138.
22) パイス，前掲[16]，『アインシュタインここに生きる』，94 ページ．
23) 金子，前掲[9]，『アインシュタイン・ショック I』，158 ページ．
24) 澤田柳吉，「Trois Balladen 墓に行く男女」，『女性改造』，**1** 巻 3 号，1922 年 12 月，創作，54–59 ページ．
25) 村山磐，『恋の顛末・石原純と原阿佐緒』耕風社，1997 年，47 ページ．
26) 村山，前掲[25]，『恋の顛末』，55 ページ．
27) 岡本拓司，「アインシュタインが来る—大正 11 年，土井不曇理学士の恍惚と不安—」，『科学技術史』，**9** 号，2006 年，67–85 ページ．
28) 寺田寅彦，『柿の種』，岩波文庫，緑 37–7，1996 年，247–249 ページ．
29) 土井不曇，『物理通話』，第九版，研究社，1943 年，114 ページ．
30) 金子，前掲[9]，『アインシュタイン・ショック I』，348 ページ．

（おかもと・たくじ，東京大学大学院総合文化研究科）

数学的な感覚の探求

思考法の源を探る

リレー連載

第11回

知性の基盤としての数理感覚

歴史＋哲学＋教育の総合的視座の確立に向けて

長岡 亮介

0. 数学的感覚を論ずる前に

「数学的な感覚の探求」という，極めて魅力的な，しかし途方もなく難しい課題を与えられて，筆の進まない日々を徒らに過ごしてしまったが，締め切りという物理的限界に迫られて，できる限りの応答をしなければと，呻くような気持ちでこれを書き始める．

芸術の世界では，特有の感覚が支配的な重要性をもつことに誰も疑いを差し挟まない．例えば音楽の場合なら，最も単純な話，絶対音感なるものを有する人が存在する．筆者の耳には「ド」から「シ」のどれも同様に確からしい音を「ソのシャープ」などとピタリと当てる（本当は，当てるのではなく，聞き分けているに違いない）のを目の当たりにすると，それがわからない自分が情けなくなるよりも，自分が全くわからないことが明確にわかる人の存在することに驚嘆する．驚嘆するということは，筆者の場合実に残念ながら，同時に自分がその世界から隔絶されていることを受け容れ，その世界へ接近する努力の放棄を意味している．

運動感覚や立体感覚，また最近はグルメなどともてはやされている味覚や嗅覚をはじめ，五感に対応して格別に鋭敏な感性を有する人が存在する．このような人は，ときには知覚過敏症と判定されることもあり得るはずであるが，一般に否定的な診断をもらうことが少ないのはなぜだろう．推定される一つの理由は，格別の繊細さが尊敬される社会的条件の存在である．水を一口含むだけで，取水口の河川を当てることができる人は，ときにはご苦労も多いかと思うが，水質管理や良い酒造りのためになくてはならない存在であるという具合いである．

音感にしても味覚にしても，当然もって生まれたときの才能（天性）を全否定するつもりはないが，おそらくは，育った環境（特に幼少期の経験）と本人の努力（意識するとしないと）によって開花したものに違いないと考えたい．天才的な能力を，その天性の才能だけで説明するのは，単なる同語反復に過ぎなくなってしまうからである．

さて，与えられた課題である「数学的な感覚」であるが，数学者の中には数学史に名を残す真に天才的な人が何人もいて，そのような人の「数学的な感覚」は凡庸な筆者には想像もつかないのは間違いない．しかし，そういう天才も含めて，数学者が共有する世界が，世間一般に誤解されているように，「俗世界とかけ離れた霊感の支配する深遠な謎の世界」というわけでは必ずしもない．数学者に共有される数理世界の風景を，数学に疎遠な人にも伝えられるような簡単な印象的素描として

提案してみたい．数学史と数理哲学を介した数学的世界への教育的アプローチである．

1. 数学的感覚と論理的感覚

まず「数学的な感覚」というと，一番一般的に想像されるものの一つは，研ぎ澄まされた論理性ではないだろうか．確かに現代数学では，表向きは，論理的厳密性の理念が高々と掲げられる．過去の偉大な数学者の偉大な業績であっても，その中に含まれている論理的な不完全が，微に入り細に入り徹底して曝かれる．それだけでない．低学年の小学生ですら知っている簡単な概念である自然数を，公理的手法で厳密に“定義”し，それによって「任意の自然数 m, n について，$m \times n = n \times m$ である」ことを“証明”するという現代数学の姿勢に，ある人は，数学者の厳格な論理性を見出し，別の人は，不健全で異様な執着的精神を見るかもしれない．

ところで，このような任意の自然数についての主張を“証明”する際に，武器となるのは，数学的帰納法と呼ばれる論法である．それは，自然数 n についての条件 $\mathrm{P}(n)$ について

[I] $\mathrm{P}(1)$ が成り立つ，

[II] 任意の自然数 k について $\mathrm{P}(k)$ が成り立つならば $\mathrm{P}(k+1)$ が成り立つ

の 2 つがいえれば，それによって「任意の自然数 n について，$\mathrm{P}(n)$ が成り立つ」ことが示される，というものである．なぜ，この論理が成立するか，という問題を巡っては，自然数全体の集合 $\mathbb{N}$ を特徴づける有名な公理[*1] に含まれる

$$\forall S\ [\ S \subset \mathbb{N}\ \text{かつ}\ \{1 \in S\ \text{かつ}\ \forall k \in \mathbb{N}(k \in S \Longrightarrow k+1 \in S)\} \Longrightarrow S = \mathbb{N}]$$

（ここで，$\mathbb{N}$ は自然数全体の集合）

によって，その正しさが保証されている，というのが今日，数学者の間で共有される“公式見解”である[*2]が，興味深いのは，すべての数学者が，数学的帰納法を，この公理に基づいて理解しているようには見えないことである．それを示すには，いわゆる数学的帰納法と呼ばれる論法の中には，上に示したものとは，形式の異なるものが存在することを指摘すれば十分であろう．高校生でも知っているものであるが，

[I] $\mathrm{Q}(1)$ が成り立つ，

[II′] $\mathrm{Q}(1)$, $\mathrm{Q}(2)$, $\cdots$, $\mathrm{Q}(k)$ がすべて成り立つならば，$\mathrm{Q}(k+1)$ も成り立つ

というタイプの議論は，数学者の間ではごくふつうに数学的帰納法として受け入れられている．しかし，これ自身は上の公理とそのままでは対応しない．そのため，これに対して，「累積帰納法」なる名前を与え，通常の方法よりも強力な論法であるとする解説もあるようである[*3]．

この事実は，現代数学の基盤ともいうべき自然数の公理にぴったりと対応しない変種の論法によってであっても，通常の方法によるのと同じく，任意の自然数についての主張が有効に証明できることが明らかであると感じている数学者の「非論理学的な論理感覚」の証左ではなかろうか．

ポアンカレ（H. Poincaré, 1854–1912）が，数学的帰納法（フランス語では完全帰納法）の中に，数学的な思考（“直観”）の根源を求め，それを，公理に基づいて基礎づけるという当時の新しい数学の流儀に否定的であったのは有名な話であるが，これも，数学的感覚が論理的感覚と同じではない可能性を示唆している．

同様のことは，発見的計算術としての微積分法

*1) ペアノ（G. Peano, 1858–1932）の公理と呼ばれる自然数の一連の定義に現れるもので，以下に述べるものはしばしば「数学的帰納法の公理」と呼ばれる．ここでわかり易さのために“+1”と表しているが，本来，ペアノがあげた公理では，これは，後続者，すなわち“次の数”の意味を担う無定義語である．なお，上の公理は次のように表すこともある．

$$\forall S\ [\ 1 \in S\ \text{かつ}\ \forall k \in \mathbb{N}\ (k \in S \Longrightarrow k+1 \in S) \Longrightarrow S \supset \mathbb{N}\ ].$$

*2) $\mathrm{P}(n)$ が成り立つような n の全体の集合を S と思えばよい，ということである．

*3) “1 以上 n 以下のすべての k について $\mathrm{Q}(k)$ である”という文を $\mathrm{P}(n)$ とし，これについて基本となる [I], [II] を考えれば良いだけではないかと筆者は思うのだが．

に，厳密な基礎付けを与えた，と評価されつつも，初学者にとってもわかりにくさから，一般には「悪名の高い」ϵ–δ（エプシロン・デルタ）論法を大上段に振りかぶって教える大学微積分の教育にも見られる．板書では

$$\forall\epsilon > 0 \text{ に対し，} \exists\delta > 0 \ s.t.\ 0 < |x - x_0| < \delta$$
$$\Longrightarrow |f(x) - l| < \epsilon \quad \cdots (*)$$

という形[*4)]で，他方講義では，「どんなに小さい正の実数 ϵ に対しても十分小さな正の実数 δ をとれば x_0 から距離が 0 より大，δ 未満の範囲の x に対して $|f(x) - l|$ が ϵ で押さえられる」と説明されることが多い．初学者からすれば，とりわけ板書版は「記号だらけであまりに不可解な，しかし，おそらくはきっと厳密に違いない」と感じられる関数の極限値についての最初の定式化である．

しかしながら，「板書版」には「講義版」に含まれる「小さい」とか「十分」あるいは「押さえられる」にぴったりと対応する表現は見あたらないし，「に対し」のような日常的な日本語，「$s.t.$」のような英語の省略表現，「$\forall$」，「$\exists$」，「$\Longrightarrow$」のような論理記号，「$>$」，「$<$」のような数学記号，「ϵ」，「δ」などのギリシャ文字，「x」，「f」，「l」などのラテン文字が無秩序に混在し，ここだけを見ても，体系立った表現とはいえないが，それ以上に根本的な述語論理の使い方として，上の表現は不正確であると指摘しなければならない．そもそも，論理学的術語を使っていえば，言明 $(*)$ において，“自由” な変数（変項）である f, x_0, l は良いとして，ϵ, δ だけがそれぞれ述語論理の量化子と呼ばれる $\forall$（任意の）と $\exists$（存在する）で “縛られ” ており，x は見かけ上自由であるが，これが形式的にはおかしいのである．本来は，x も “縛って”

$$\forall\epsilon\ [\ \epsilon > 0 \Longrightarrow \exists\delta\ \{\delta > 0\ \&\ \forall x(0 < |x - x_0| < \delta$$
$$\Longrightarrow |f(x) - l| < \epsilon)\}]$$

と表すべきところであるからである．ここで，ϵ や δ，そして x という変数（変項）を考える範囲（universe）は，$\mathbb{R}$（実数全体の集合）としているが，もし ϵ と δ の universe を正の実数全体に制限して，さらに簡潔な形

$$\forall\epsilon,\ \exists\delta,\ \forall x\ (0 < |x - x_0| < \delta \Longrightarrow |f(x) - l| < \epsilon)$$

とすれば，このように，x を「$\forall$」で “縛る” 必要性がより明解に見えてくるだろう．

他方，「に対し」は「$\forall$」に続く「$\Longrightarrow$」であり，「$s.t.$」は「$\exists$」以下に続く条件を「かつ」で連立して括弧で括ることを漫然と意味していたということである．

ただし，x についての 2 条件 $p(x), q(x)$ について，単に “$p(x) \Longrightarrow q(x)$” と書いたら，ちょうど “$x > 2 \Longrightarrow x^2 > 4$” の場合にそうであるように $\forall x\big(p(x) \Longrightarrow q(x)\big)$ を意味するので，$\forall x$ を省いて

$$0 < |x - x_0| < \delta \Longrightarrow |f(x) - l| < \epsilon$$

と書くことが許されないわけではない．しかし，もしそうであるとすれば最初の ϵ についても $\forall$ を省いて

$$\epsilon > 0 \Longrightarrow \exists\delta\ (\ \delta > 0\ \&\ 0 < |x - x_0| < \delta$$
$$\Longrightarrow |f(x) - l| < \epsilon)$$

と表してよいはずである．

ということは，後に出る x の前につくべき $\forall$ を無視したまま，最初の ϵ についてのみ $\forall$ を強調して教えるのは，形式的にはバランスを欠くと言わなければならない，ということである．

おそらくは「ϵ–δ 論法」という呼称が普及し過ぎているために，ϵ と δ の 2 つだけに量化子を付けるだけの，型にはまった教育が行われてしまっているのであろうが，これは通常の微積分の教育が論理学的に間違っているというよりは，むしろ反対に，述語論理という強力な道具を利用しながらも，論理学のルールを厳格に守らずに数学の理解と解説が実現されている，と筆者は見ている．そ

*4)　最近の多くの講義では，関数の極限に先立って，数列の極限についての

$$\forall\epsilon > 0 \text{ に対し，} \exists N \in \mathbb{N}\ s.t.\ n > N$$
$$\Longrightarrow \forall|a_n - l| < \epsilon$$

を「ϵ–N 論法」という名で紹介しているようである．これにも以下に示すのと同じ「欠点」がある．

して ϵ–δ 論法の核心は，ϵ が error（誤差），δ が distance（距離）を意味している，という，論理表現の表に現れない記号の裏にある数学的意味を通じてより深く理解されることも重大である．f が関数（function）を表すために使われるのと同様である．やはり，数学的感覚は，論理的感覚とは同じでない．

2. では，数学的感覚とは，…

数学的感覚が論理的感覚と違うとすれば，それは何なのだろう．これに明示的な回答を与えることは，困難であるが，数学を嫌う人々に共通する感覚を逆照射することで，いわば陰を通して少し見えてくるものについて述べよう．

数学を嫌う人が一様に口にするのは，数式のわかりにくさである．数式は，数学を他人へ（ときには自分から自分へ）伝達するための言葉であるから，その言葉を含む言語に親しんでいない人には，未経験の外国語と同じように全く意味不明であるのはごく当然である．しかも，数式をはじめとする数学の言語は，母国語のように人間の原体験の中に自然な対応物（ヘレン・ケラーの “water!”）をもたない人工的言語であるから，理解に向けた努力なしには，外国語以上に意味不明といって良いだろう．

数学は歴史的にはその機能的な人工言語を開拓することを通じて発展してきた．実際，近代における数学の新しい記号法の発明は，数学の発展に決定的に大きな影響力をもった．「数」に代わって「式」を対象とする数学的手法は，“普遍的数論 Arithmetica universalis” という派手な呼称の下，伝統的な数学を一新する飛躍を可能にし，その後わずか数世紀の間に，数学の言語もそれで語られる数学的世界も一気に豊穣化した．数学は，概念の定式化や理論の発展を通じて作り上げられてきた歴史性と社会性を有する特有の言語的世界といって良いのではないだろうか．

もし数学が，この機能的な言語を欠いていたなら，近代数学のめざましい発展は困難であったに違いない．このことは，ユークリッド（エウクレイデス）の『原論』*5) やニュートンの『自然哲学の数学的原理』*6) に見られる自然言語に近い伝統的な幾何学の言葉による議論の展開が，現代のものと比べて遥かに読解が困難*7) であることをひけば納得がいこう．

おそらく，数学的感覚の中のかなりの部分は，人工的な言語を用いて構成される言語空間に対する親近感・臨場感やその面白さ・豊かさに対する感動や驚愕・憧憬であろう．数学者がしばしば口にする「数学的美」とは，これを素朴に，しかも強い確信をもって述べるときの常套句である．しかし，芸術における美の定義が難しいように，数学におけるそれも，別の言葉に置き換えるのは容易ではない．それは，数学的研究の共同体の中で，暗黙のうちに，しかし，明確に共有されている，数学的な本質への接近についての喜びの感覚であり，それを共有していない人から見れば，変人たちの主観に過ぎないが，数学共同体の中では普遍的に共有されている客観である．

これは高等数学に限った話ではなく，小学生レベルの数学にすら存在する．例えば，鶴亀算のような，それ自身には意味がない問題（誰が鶴と亀の足を混ぜて数えるだろうか！）であったとしても，「もし全部亀であったとすると」というような，世界を仮想的に組み替えることを通じて，何人も反駁し得ぬ論説（discourse）を組み立てることは，目眩く明晰かつ判明な数学的認識の体験ではないだろうか．

しかしながら，数学的議論もその深度が増すにつれ，理解は困難になる．困難に屈しない粘り強い思索なしにはより深い本質への接近の喜びを感

---

*5) まことに示唆的なことに，『原論』の原題「Στοιχεῖα（ストイケイア）」は，そのラテン語訳 Elementa の原義と同様，言語の最小単位であるアルファベットのような意に由来する．

*6) 我が国では著書の冒頭の『プリンキピア』の名で親しまれている．この書物が，ニュートンの発見した「流率法」を縦横に駆使して書かれていないことは，数学史の最も重要な話題の一つである．

*7) 『原論』13 巻のうち，現代人にも辛うじて「わかりやすい」のは，中学・高校の数学にも登場する話題を扱った第 1 巻くらいであろう．実際，第 2 巻などを「幾何的代数」（van der Waerden）と解釈することへの誘惑は，現代人には断つのが難しい．

ずることは不可能である．これが多くの人を数学から遠ざけ，また一部の人を数学に強くひきつける理由であろう．ここでいう粘り強さは単なる忍耐心，単なる我慢強さとは異なる，という点が，面白くも，また大切である．発見や理解という甘美な数学的感動があるからこそ堪能できる，努力の醍醐味なしには，数学的思索は成立し得ない．

意外性の外見の中に隠れ潜んでいた本質の発見に代表される数学的感動は，しかし，数学に限るものではあるまい．ただしばしば数学において，最も劇的に，最も明解に，しかも，最も初歩的なレベルにおいてですら登場するというだけである．

ただ，数学者はしばしばあまりにも「口下手」であるため，自分の感動を数学者以外の他人に上手に語ることに不熱心であるだけでなく，たまに口にするのは，ふだんは考えてもいない「厳密な論理性」のような空々しい台詞であるために，数学を人々から遠ざけ，自分たちが周囲に理解されないことを数学の宿命のように思ってしまうのではないだろうか．さらに悪いことには，数学が教育の場面においては，しばしば技術的な知識という，数学の不可欠な一部ではあるが，数学理解の本質とは遠い部分だけに焦点が当てられてしまい，これが人々の数学に対する誤解を増幅し定着させる元凶になっていることだ．この可能性が今日，現実性としてますます勢いを増していることはまことに哀しいことである．

3. 数学的体験の感動の輪を拡げよう

数学は，言葉＝ロゴス＝論理を介した智（sophia）に対する特有の接近（philo=吾は愛する）という，文字通りの意味で philosophy，プラトン的にいえば，肉体的には不可視，不可蝕の実在を，魂の瞳で覚知するものである．だからこそ，格別の才能の有無とは独立に接近することのできるその最も基本的な部分は，できるだけ多くの人々が特に若い時代に経験するべきものであるのではないだろうか．数学についての感覚を経験しこれを鍛えることは，自他の理解に向かっての第一歩であることを，数学の教育に携わる立場の人は，もっと大きく心に置いて良いのではないか．この感覚の本格的な共有や厳しい鍛錬が文字通りの意味では万人に通用するものでないとしても，少なくとも，数学的感覚への人々の接近の可能性の芽を摘むような「教育」は，数学においては断固として排除されなければならない．若い世代の言語世界が急速に単純化している現代において，現代数学の教育を活き活きとした数学的体験の場とするためには，単なる技術的な知識の伝達に傾くことに対し十分な警戒心をもち，現代数学という特異な言語空間の魅力を学生たちが確信できるような教育努力が必要である．その意味では「会話を重視したグローバル人材の育成」のような今どきの英語教育よりは，読書と作文を基本に，漢文の素読や名文の朗読を重視した「古臭いスタイル」の国語教育に，現代における数学教育の刷新のために重要なヒントが隠されているように筆者は考えている．これを詳細に述べるにはしかし，紙数が足りない．

数学はその本質において特別の人だけが接近できる崇高な霊峰であるとしても，平地からその偉容を仰ぎ見て，鑑賞することの意味は，決して小さくないはずである．「ロンリ」や「テクニック」を叫んで数理世界への「一般の立ち入り」に注意や制限をするより，数理世界のすばらしい眺望を少しでも身近に展望できる舞台へと人々を誘いたいものである．絶対音感のない人間にすら，音楽を通じた大きな感動や深い慰めの体験はあるのであるから．

（ながおか・りょうすけ，明治大学理工学部）

特　集（2013 年 9 月号予告）

ボーア

量子力学の開拓，原子模型から百年

本体 952 円

特　集（2013 年 7 月号）

群と物理学

代数構造を用いて物理を知るために

本体 952 円

編集後記

身近に浸透しているエネルギーですが，物理でも基本概念であります．今回の特集では基礎的なことから最近話題となったことまで解説していただきました．いかがでしたでしょうか．

私もエネルギーを通して見えてくる物理の奥深さを知ることができました．(R)

＊　　＊

今回は「エネルギー」をテーマに，いろいろな分野を対象にして解説をしていただきました．エネルギーというキーワードを切り口に，各解説，基礎から現在進行中の話題にまで及ぶ様々な展開をしています．各分野における重要性が感じられました．(T)

数　理　科　学　8月号

2013 年 8 月 1 日発行

数 理 科 学 編 集 部　　発行人 木　下　敏　孝
TEL. (03) 5474–8816
FAX. (03) 5474–8817

ホームページ　http://www.saiensu.co.jp
ご意見・ご要望は　sk@saiensu.co.jp　まで．

発行所 © 株式会社 **サ イ エ ン ス 社**　TEL. (03) 5474–8500 (代表)
〒 151–0051 東京都渋谷区千駄ヶ谷 1–3–25　振替 00170–7–2387　(03) 5474–8600 (広告部)

印刷・製本　三美印刷株式会社　山岡景仁